

# GEOMETRIE VECTORIELLE

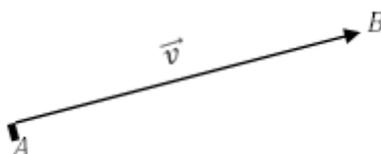
A la fin des activités, je dois être capable de (d') :

- maîtriser les techniques élémentaires des calculs vectoriels
- mettre en œuvre les techniques élémentaires pour l'étude vectorielle des situations rencontrées en géométrie pure

## Notions sur les vecteurs

### J'apprends un peu de vocabulaire

Un vecteur  $\vec{v}$  d'origine  $A$ , d'extrémité  $B$ , de longueur  $AB$ , de direction la droite  $(AB)$  (ou support) et de sens de  $A$  vers  $B$  est noté  $\overrightarrow{AB}$



### Je révise les notions vues en classe de 4<sup>ème</sup>

- $\vec{u} = \vec{v}$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ 
  - ✓ ont la même longueur,
  - ✓ ont de direction parallèle,
  - ✓ sont de même sens.
- $\vec{u} = \vec{v}$  si et seulement si la translation  $t_{\vec{u}}$  définie par le vecteur  $\vec{u}$  est égale à la translation  $t_{\vec{v}}$  de vecteur  $\vec{v}$  ( $t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}}$ ).
- $A, B$  et  $C$  sont trois points du plan, la relation de Chasles est donnée par  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

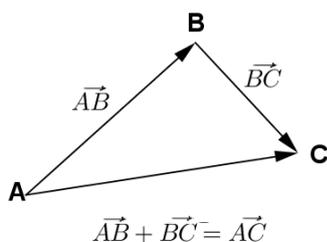


Figure 1 les points  $A, B$  et  $C$  sont non alignés

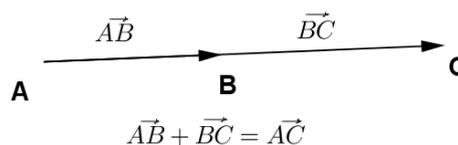
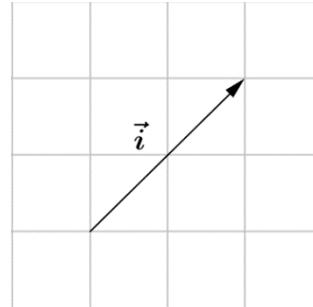


Figure 2 les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés

**Activité 1 :**

Représenter graphiquement les vecteurs suivants

- vecteur  $\vec{u} = \vec{i}$
- vecteur  $\vec{v}$  opposé au vecteur  $\vec{i}$
- Un vecteur  $\vec{w} = 2\vec{i}$

**Activité 2 :**

Copie et Complète les pointillés.

- 1)  $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KM} = \dots$
- 2)  $\overrightarrow{PQ} = \dots + \overrightarrow{RQ}$
- 3)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\dots C} + \overrightarrow{\dots B}$
- 4)  $\overrightarrow{E \dots} = \overrightarrow{\dots F} + \overrightarrow{\dots G}$

**Activité 3 :**

Donne une expression simple des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{m}$

- 1)  $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI}$
- 2)  $\vec{v} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$
- 3)  $\vec{w} = \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$
- 4)  $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$

**Activité 4 :**

$A$  et  $B$  sont deux points du plan

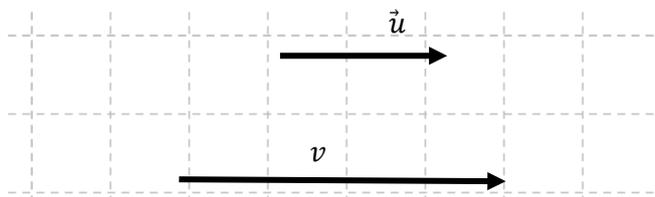
Démontre que  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$  en admettant qu'on a toujours  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

## Somme de deux vecteurs

### J'observe et je découvre

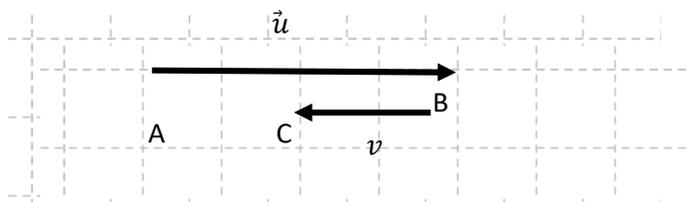
#### Activité 5 (les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens)

- 1) Reproduis sur ton cahier les deux vecteurs colinéaire  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  représentés ci-dessous



- 2) Construis le vecteur  $\vec{v}_1$  qui est égale à  $v$  et a comme origine l'extrémité du vecteur  $\vec{u}$
- 3) 3) En déduire que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{v}_1$
- 4) Construis le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$
- 5) Qu'est-ce qu'on peut dire du vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  ? (sens, direction, longueur)

#### Activité 6 : (les deux vecteurs sont colinéaires et de sens différents)



- 1) Ecrire à l'aide des points  $A, B$  et  $C$  les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$
- 2) En déduire l'expression de la somme  $\vec{u} + \vec{v}$
- 3) Qu'est-ce qu'on peut dire du vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  ? (sens, direction, longueur)
- 4) Comment on construit le vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  à l'aide d'une règle et un compas ?

#### Activité 7 : (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires)

- 1) Reproduis les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  représentés ci-dessous.



- 1) Construis un vecteur  $\vec{v}_1$  qui est égale à  $\vec{v}$  et a comme origine l'extrémité de  $\vec{v}$ .
- 2) Construis le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$
- 3) Qu'est-ce qu'on peut dire du vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  ? (sens, direction, longueur)
- 4) Comment on construit le vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  à l'aide d'une règle et un compas ?

### **Je contrôle mes connaissances**

#### **Activité 8 :**

Simplifier les écritures vectorielles suivantes

- 1)  $\vec{AB} + \vec{DE} + \vec{BD} + 2\vec{EA}$
- 2)  $2\vec{IA} - \vec{AB} + \vec{IB}$
- 3)  $\vec{IA} + \vec{AI}$

#### **Activité 9**

Soient les points A, B et I vérifiant  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  avec A et B deux points non confondus

- 1) Construis sur ton cahier le point A, B et I, qu'est-ce qu'on peut dire du point I ?

Maintenant nous avons  $\vec{u} = \vec{GA} + \vec{GB}$  en utilisant la relation de Chasles  $\vec{GA} = \vec{GI} + \vec{IA}$

et

$$\vec{GB} = \vec{GI} + \vec{IB}$$

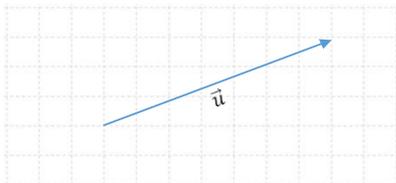
- 2) Donne une expression simple du vecteur  $\vec{u}$
- 3) Construis sur ton cahier le vecteur  $\vec{u}$

A.

## *Multiplication d'un vecteur par un nombre réel*

*J'observe et je découvre*

#### **Activité 1 :**



- 1) Recopie et construis sur un papier quadrillé le vecteur  $\vec{u}$
- 2) Construis le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u}$

Compare les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  (sens, direction et longueur) Remarque : on note aussi  $\vec{w} = 2\vec{u}$ .

## Activité 2 :

### Je retiens l'essentiel

- Soient  $\vec{u}$  un vecteur non nul du plan et  $k$  un réel
  - 1<sup>er</sup> cas : si  $k$  est un réel positif non nul,  $k\vec{u}$  est un vecteur
    - De même sens que  $\vec{u}$
    - De même direction que  $\vec{u}$
    - De longueur  $k$  fois celle de la longueur du vecteur  $\vec{u}$
  - 2<sup>ème</sup> cas : si  $k$  est un réel négatif non nul,  $k\vec{u}$  est un vecteur
    - De sens opposé au sens du vecteur  $\vec{u}$
    - De même direction que  $\vec{u}$
    - De longueur  $k$  fois celle de la longueur du vecteur  $\vec{u}$
  - 3<sup>ème</sup> cas : si  $k = 0$  alors  $k\vec{u} = \vec{0}$
- Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs,  $k$  et  $l$  deux nombres réels, on a
  - $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
  - $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
  - $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
  - $1\vec{u} = \vec{u}$
  - $0\vec{u} = \vec{0}$

### Je contrôle mes connaissances

#### Activité 3

On donne  $\vec{u}$  un vecteur du plan, construis sur une feuille quadrillée les vecteurs suivants

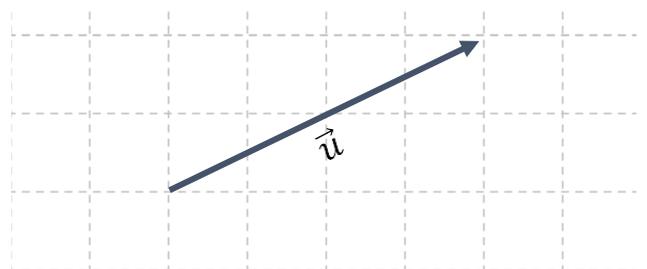
$$\vec{w} = 2\vec{u},$$

1)  $\vec{m} = -3\vec{u},$

2)  $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{u}$

3)  $\vec{p} = \frac{5}{2}\vec{w},$

4)  $\vec{q} = \frac{1}{6}\vec{m}$



---

## B. Caractérisation de deux vecteurs colinéaires

---

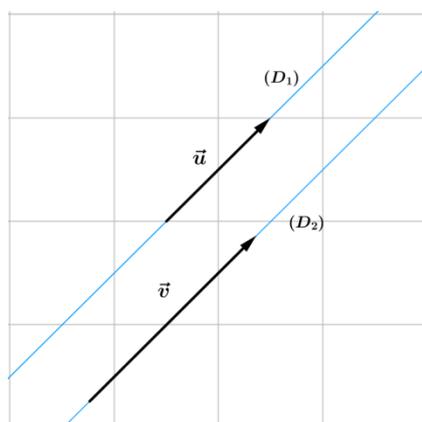
Je lis la définition

**Définition :**

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si :

- Les supports des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont parallèles

Dans ce cas, on note  $\vec{u} // \vec{v}$ .



J'observe et je découvre les propriétés

Activité 1 : (1<sup>ère</sup> propriété)

$ABCD$  est un parallélogramme,  $I$  milieu du segment  $[AB]$



- 1) Reproduis sur une feuille quadrillée la figure ci-dessus
- 2) Exprime en fonction du vecteur  $\vec{IB}$  l'expression du vecteur  $\vec{CD}$ .
- 3) Donne deux méthodes pour démontrer que  $\vec{IB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.
- 4) Dans quelle condition deux vecteurs sont colinéaires ?

### Je retiens l'essentiel

#### Propriétés 1

Les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  non nul tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = k\vec{u}$$

#### Je lis la démonstration

- Si on a la relation  $\vec{u} = k\vec{v}$ , le vecteur  $k\vec{v}$  a la même direction que  $\vec{v}$  (voir multiplication d'un vecteur par un nombre réel non nul) donc  $\vec{u}$  a la même direction que  $\vec{v}$ , donc  $\vec{u} // \vec{v}$ .
- Réciproquement, si  $\vec{u} // \vec{v}$  alors le vecteur  $\vec{u}_1 = k\vec{v}$  avec  $k = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ .  
D'où les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_1$  ont la même direction et de même longueur c'est à dire  $\vec{u} = \pm\vec{v}$ , on déduit alors  $\vec{u} = \pm k\vec{v}$ .

#### Propriétés 2 (Règle de parallélogramme)

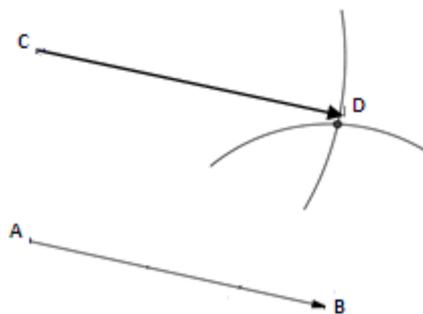
$A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés,  $ABCD$  est un parallélogramme si et seulement si  $\vec{AB} = \vec{CD}$

#### Je lis la démonstration

$A, B$  et  $C$  sont trois points non alignés, si  $\vec{AB} = \vec{CD}$  alors les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles et  $\vec{AB} = \vec{CD}$

Réciproquement, si  $ABCD$  est un parallélogramme, alors  $AB = CD$  et les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

Activité 2 : Comment construire deux vecteurs colinéaires par la règle de parallélogramme ?



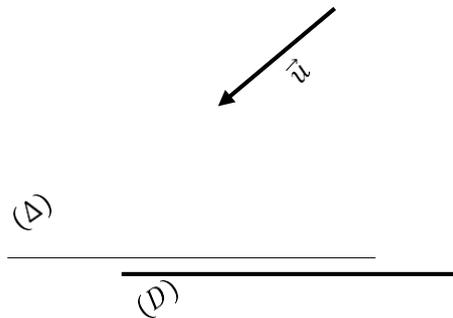
- 1) Trace un vecteur  $\vec{AB}$  de longueur  $3\text{cm}$  sur une feuille quadrillée, on veut construire un vecteur  $\vec{u}$  colinéaire à  $\vec{AB}$ .
- 2) Place un point  $C$  qui n'appartient pas à la droite  $(AB)$ ,
- 3) à l'aide d'un compas, construis un arc de centre  $B$  et de rayon de même longueur que le segment  $[AC]$ .

- 4) Construis un autre arc de centre  $C$  et de rayon égal à la longueur du segment  $[AB]$
- 5) On obtient un point  $D$  intersection des deux arcs construits.

### *C. Vecteurs directeurs d'une droite*

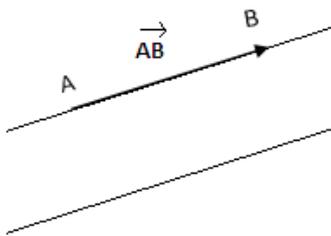
#### Définition

Le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de la droite  $(D)$  si et seulement si la direction  $(\Delta)$  du vecteur est parallèle à la droite  $(D)$ .



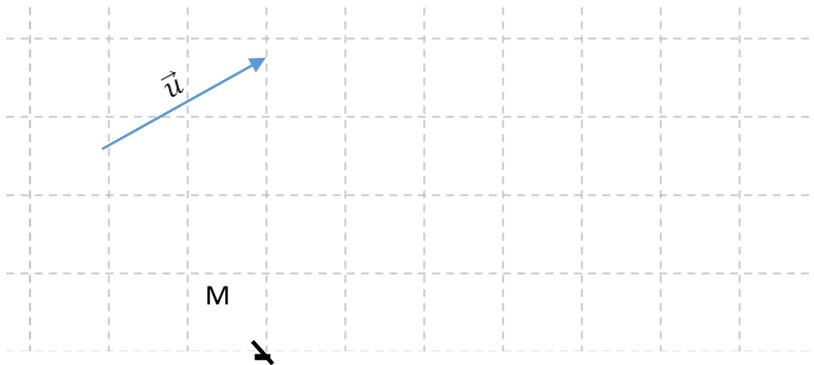
#### Propriétés:

- Une droite passant par deux points distincts  $A$  et  $B$  a pour vecteur directeur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .



- Si  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de la droite  $(D)$  et si un vecteur  $\vec{v}$  est colinéaires à  $\vec{u}$  alors  $\vec{v}$  est aussi un vecteur directeur de  $(D)$ .

Activité 1:



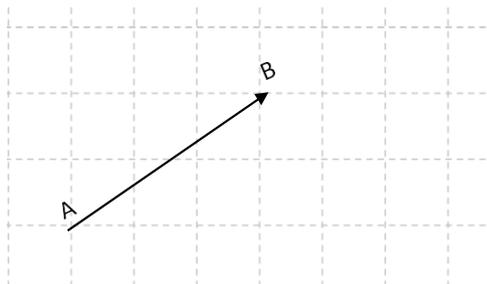
- 1) Reproduis sur une feuille quadrillée la figure ci-dessus.
- 2) Construis une droite  $(D)$  passant par  $M$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$

Activité 2:

Trois points  $A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  colinéaires à  $\overrightarrow{BC}$ .

*Je fais la démonstration*

- 1) Si  $\overrightarrow{AB}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{BC}$ , construis le point  $C$



- 2) Qu'est-ce qu'on peut dire des points  $A, B$  et  $C$  ?
- 3) Si  $A, B$  et  $C$  sont alignés, montre que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires

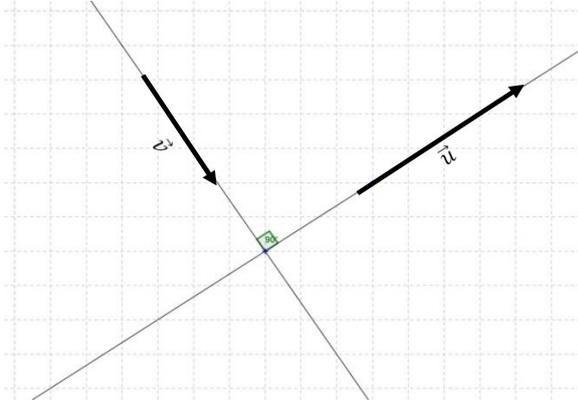
---

## D. Orthogonalité de deux vecteurs

---

### Définition

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si leurs supports sont orthogonaux.



On note  $\vec{u} \perp \vec{v}$

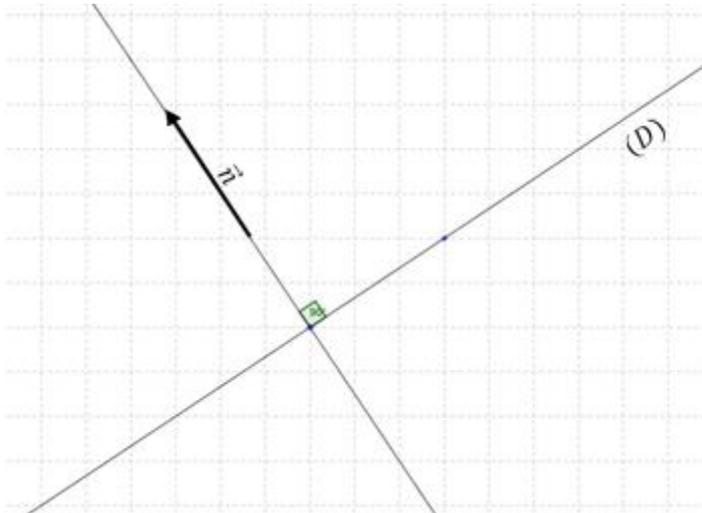
---

## E. Vecteur normal d'une droite

---

### Définition :

Soit  $(D)$  une droite, le vecteur  $\vec{n}$  est un vecteur normal de  $(D)$  si son support est perpendiculaire à  $(D)$ .



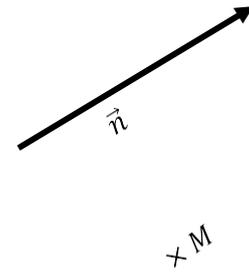
### Propriétés d'un vecteur normal :

$(D)$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  tout vecteur orthogonal à  $\vec{u}$  est un vecteur normal de la droite

Je contrôle mes connaissances

Activité 1 :

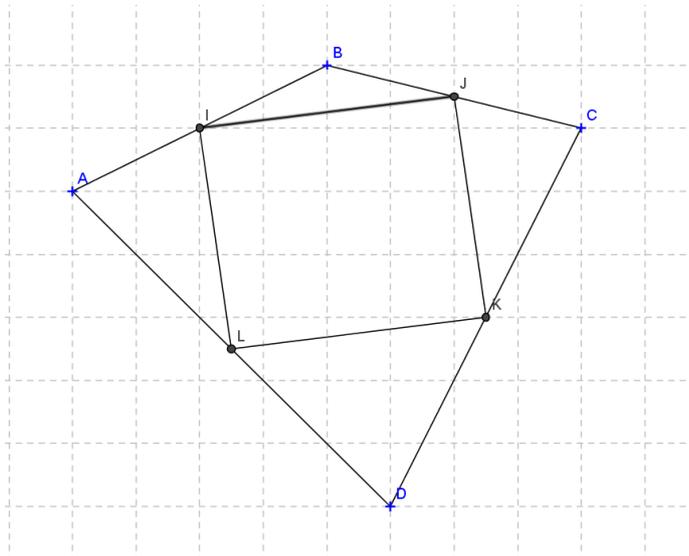
Trace une droite  $(D)$  de vecteur normal  $\vec{n}$ , passant par le point  $M$



Activité 2

$ABCD$  est un quadrilatère, les points  $I, J, K, L$  sont des milieux respectifs des segments  $[AB], [BC], [CD]$  et  $[DA]$

Fais la figure



- 1) En utilisant le théorème de Thales, démontrer que  $\vec{IJ} = \vec{LK}$ . Quelle est la nature de la figure  $IJKL$ ?