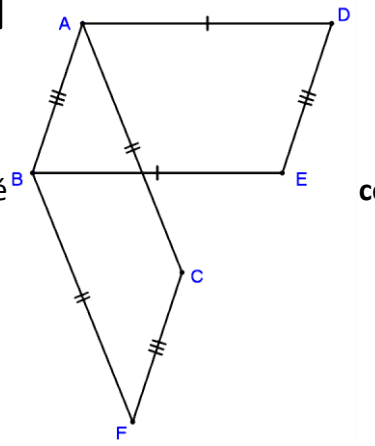
PROPRIETES DE PYTHAGORE



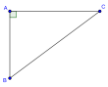
A. Révision

1. **Trace un triangle ABC rectangle en A et complète les pointillés :**
   Dans un triangle ABC rectangle en A : l'angle $\hat{A}$ mesure **90°** ; les côté**s** **côtés de l'angle droit** ; le côté [BC] est appelé **hypoténuse**
2. **Calcule :**
   $4^2 = 16$; $1{,}5^2 = 2{,}25$; $49^2 = 2401$

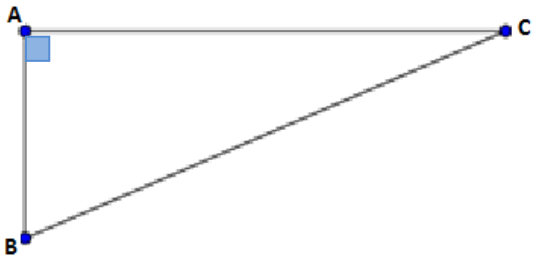
B. Propriété directe de Pythagore

Activité 1 :

1. Voir figure ci-contre

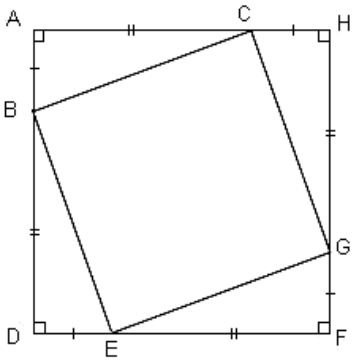


2. BC = 5cm
3. $AB^2 = 9$, $AC^2 = 16$, $BC^2 = 25$ et $AB^2 + AC^2 = 25$
4. $AB^2 + AC^2 = BC^2$
5. Voir figure ;



   BC = 13 ; $AB^2 = 25$; $AC^2 = 144$; $BC^2 = 169$, $AB^2 + AC^2 = 169$; $AB^2 + AC^2 = BC^2$
6. Je complète la propriété :
   « Dans un triangle rectangle, la **somme** des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est **égale** au carré de l'hypoténuse ».

Activité 2 :



1) ADFH est un carré car les 4 côtés sont de même longueur et il possède un angle droit.
2) Les quatre triangles BAC, CHG, GFE et EDB sont superposables car ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur. Par conséquent, BC = CG = GE = EB.
   D'autre part on a : mes($\widehat{ACB}$) = mes($\widehat{HGC}$), mes($\widehat{ABC}$) = mes($\widehat{HCG}$),
   donc mes($\widehat{ACB}$) + mes($\widehat{HCG}$) = mes($\widehat{ACB}$) + mes($\widehat{ABC}$) = 90°
   et mes($\widehat{BCG}$) = 180° - 90° = 90°.
   Le quadrilatère BCGE est donc un carré car il est un losange possédant un angle droit. Sa surface est : Aire(BCGE) = $BC^2 = c^2$
3) L'aire du carré ADFH :
   a) en utilisant la longueur de son côté :
      Aire(ADFH) = $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
   b) en l'écrivant comme somme des aires du carré BEGC et des triangles ABC, BDE, EFG et GHC :
      Aire(ADFH) = Aire(BCGE) + 4 x Aire(ABC) = $c^2 + 4 \times \frac{AB \times AC}{2} = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$
4) Aire(ADFH) = $c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$, donc $c^2 = a^2 + b^2$

Activité 3 :

2) Aire(ABC) = $\frac{1}{2} BC \times AH$

Aire(ABC) = $\frac{1}{2} AB \times AC$ car un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle. Ici l'aire du rectangle est égale à $AB \times AC$.

3) a) AB = 3 ; AC = 4 ; BC = 5 (en utilisant la propriété directe de Pythagore) et $AH = \frac{12}{5} = 2{,}4$

b) AB = 5, BC = 13, AC = 12 et $AH = \frac{60}{13} \approx 4{,}62$

c) AC = 24, BC = 25, AB = 7 et $AH = \frac{168}{25} = 6{,}72$

C. Propriété réciproque de Pythagore

Activité 4 : 1) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle (en M) MNP, on a $MN^2 + MP^2 = NP^2$, mais MN = AB et MP = AC donc $NP^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2$.

2) Puisque $NP^2 = BC^2$, nous pouvons dire que NP = BC

3) Comme AB = MN, AC = MP et BC = NP, les deux triangles ABC et MNP sont superposables. ABC est donc un triangle rectangle en A

4) Des activités 2 et 3, je peux conclure que :

« Les triangles rectangles sont les seuls triangles qui possèdent deux côtés dont la somme des carrés des longueurs est égal au carré de la longueur du troisième ».

Activité 5 :

a) ABC est un triangle rectangle en B.
b) ABC est un triangle rectangle en A.
c) ABC n'est pas un triangle rectangle.
d) ABC n'est pas un triangle rectangle.
e) ABC est un triangle rectangle en C.

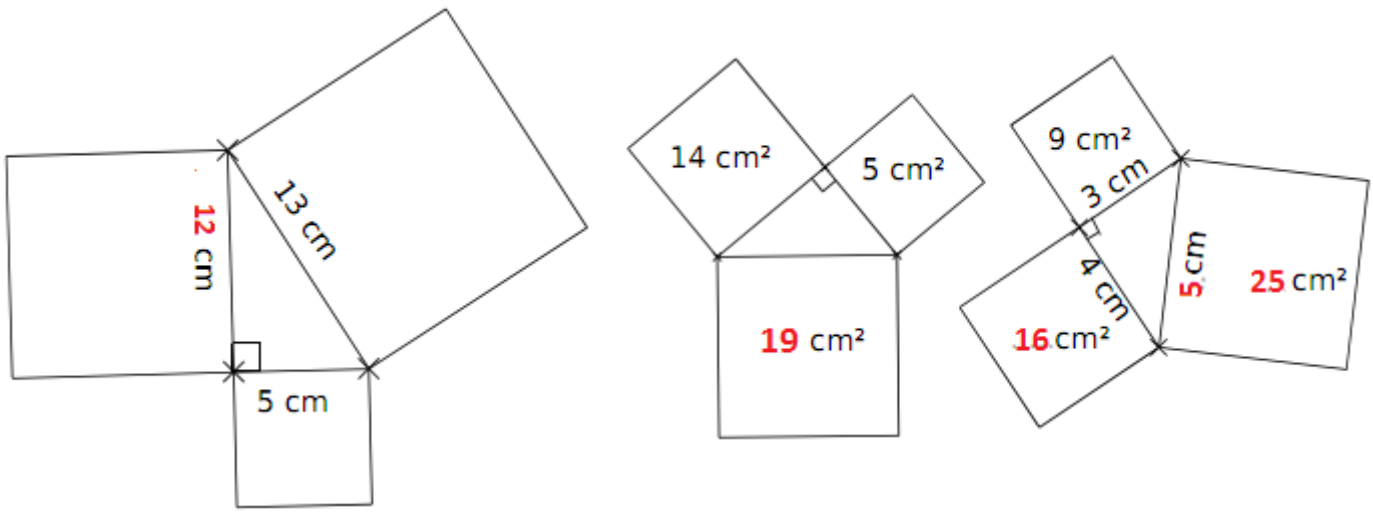
Activité 6 :

AB	AC	BC
3	4	5
5	12	13

AB	AC	BC
7	24	25
8	15	17

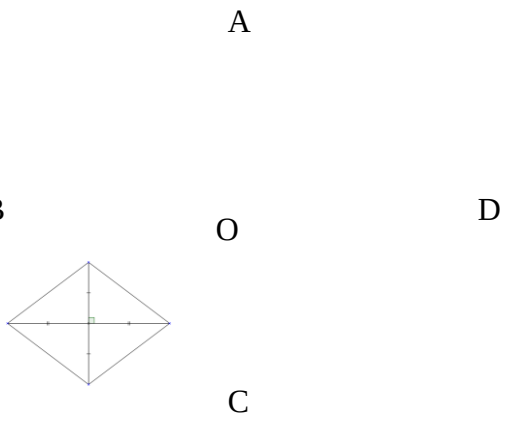
AB	AC	BC
13	84	85
16	30	34

Exercice 1 :



Exercice 2 :

a. Voir figure



b. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle AOB, on a : $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$AB^2 = 5^2$, donc AB = 5cm et le périmètre de ce losange est :

P =4 x AB = 4 x 5cm = 20cm

APPLICATIONS DES PROPRIETES DE PYTHAGORE

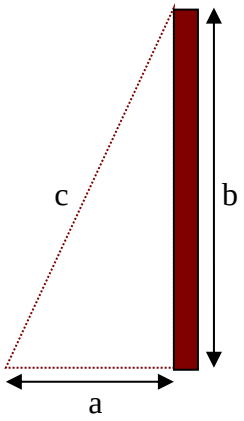
A. Révision

1. **(**Propriété directe) Dans un triangle ABC rectangle en A, la somme des carrées des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

2. (Propriété réciproque) Si les longueurs des côtés d'un triangle MNP vérifie $NM^2 + NP^2 = MP^2$. Alors MNP est un triangle rectangle de sommet N.

Exercice 1 :

1) Pour chaque câble, l'ensemble câble-pylône peut être schématisé par la figure ci-contre, dans laquelle le câble est l'hypoténuse.



D'après la relation de Pythagore, on a $c^2 = a^2 + b^2$.

Donc pour la question 1, $c^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$

La longueur minimale d'un câble est donc de 26m

2) La longueur de câble utilisé est de : $4 \times (26 + 2) =$ *112m*

Exercice 2 :

- $3 + 4 + 5 = 12$ et $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$
- Le triangle de côtés 3, 4, 5 est donc un triangle rectangle. 3 et 4 sont les mesures des cotés de l'angle droit et 5 celle de l'hypoténuse.
- (5, 12, 13) ; (8, 15, 17) sont des triplets qui forment une équerre.

Exercice 3 :

Situation 1 : Appelons c la longueur de l'échelle. Le sol étant horizontal et le mur vertical, nous avons un triangle rectangle dont le sommet est le pied du mur.

Par application de la relation de Pythagore, on a $c^2 = 1,2^2 + 3,5^2 = 1,44 + 12,25 = 13,69 = 3,7^2$.

L'échelle mesure donc 3,7m

Situation 2 : Notons h la hauteur de la fenêtre.

D'après Pythagore, $h^2 + 1,3^2 = 8,5^2$, donc $h^2 = 8,5^2 - 1,3^2 = 72,25 – 1,69 = 70,56 = 8,4^2$

La hauteur de la fenêtre est donc de 8,40m.

Exercice 4 :

Monsieur BRICOLTOU peut mettre en place son meuble si la diagonale du meuble est inférieure à la hauteur du mur.

En exprimant les longueurs en cm, nous avons :.

- Le carré de la diagonale vaut : $45^2 + 210^2 = 2025 + 44100 = 46125$
- Le carré de la hauteur du mur vaut $212^2 = 44944$

Comme le carré de la diagonale du meuble est supérieur au carré de la hauteur du mur, il est impossible de mettre en place le meuble.