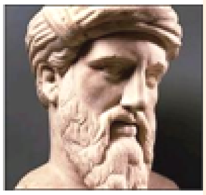
I. PROPRIETES DE PYTHAGORE

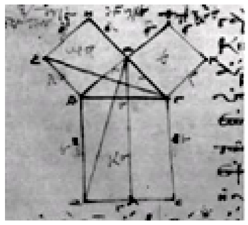
A la fin des activités de cette fiche, je dois être capable d’ (de) :
- énoncer les propriétés directe et réciproque de Pythagore dans un triangle rectangle
- calculer la mesure d’un côté et/ou de la hauteur d’un triangle rectangle connaissant les mesures des deux autres
- reconnaître si un triangle dont on connaît les longueurs des côtés est rectangle ou non



Pythagore

Pythagore (v. 570-v. 490 av. J.-C.), philosophe et mathématicien grec.
Originaire de Samos, Pythagore est exilé à Crotone par le tyran Polycrate. Il y fonde une école de mathématiques qui exerce une grande influence politique et morale. Ses élèves sont nommés « les pythagoriciens ». Le «théorème de Pythagore» ne fut ni découvert ni sans doute démontré par celui qui lui a donné son nom. La diagonale du carré ne contenant pas un nombre entier de fois le côté, le problème était de « trouver une fraction du côté qui soit contenue un nombre entier de fois dans l'un et dans l'autre ». Des pythagoriciens démontrèrent l'impossibilité de trouver une telle «commune mesure», jetant un trouble profond dans les cercles savants de la société.

cf. Hachette Multimédia 2005



A. Révision

Je me rappelle

1. **Trace un triangle ABC rectangle en A et complète les pointillés :**
   Dans un triangle ABC rectangle en A : l’angle $\hat{A}$ mesure …….. ; les côtés [AB] et [AC] sont appelés ………………. ……………………………………………….. ; le côté [BC] est appelé …………………………………
2. ***Calcule :***
   4^2 ; $1{,}5^2$; 49^2

B. Propriété directe de Pythagore

J’observe et je découvre

<u>Activité 1</u> :

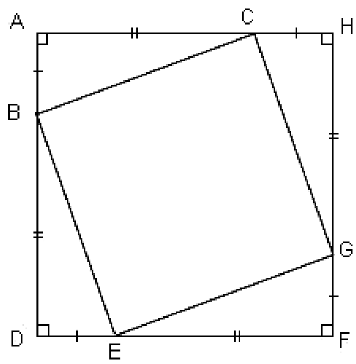
1. Trace soigneusement un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3cm, AC = 4cm
2. Mesure la longueur du côté [BC]
3. Calcule AB^2, AC^2, BC^2 et $AB^2+ AC^2$
4. Compare $AB^2+ AC^2$ et BC^2.

5. Refais les questions 1, 2, 3, 4 en prenant AB = 5cm et AC = 12cm
6. A partir des deux résultats obtenus, complète la propriété :
   « Dans un triangle rectangle, la …………………………. des carrés des longueurs des côtés de l’angle droit est ……………………. au carré de l’hypoténuse.

Je justifie la propriété

Une démonstration simple mais rigoureuse du théorème et de sa réciproque !...

<u>Activité 2</u> : Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont AB = a, AC = b et BC = c.
De plus on a : CH = GF = DE = AB et HG = FE = DB = AC.



1) Précise la nature du quadrilatère ADFH ?
2) Montre que le quadrilatère BEGC est un carré. Quelle est sa surface ?
3) Exprime la surface du carré ADFH :
   a) en utilisant la longueur de son côté.
   b) en l’écrivant comme somme des aires du carré BEGC et des triangles ABC, BDE, EFG et GHC.
4) Utilise les deux expressions de l’aire du carré ADFH pour montrer que : $a^2 + b^2 = c^2$.

Je contrôle mes connaissances

Activité 3 : ABC est un triangle rectangle en A. Les longueurs de ses côtés sont AB, AC et BC et AH est la longueur de la hauteur issue de A.

1) Construis une figure représentant la situation.
2) Donne deux formules différentes pour calculer l'aire du rectangle ABC
3) L'unité étant le centimètre, calcule les longueurs non connues dans chacun des suivants :
   a) AB = 3 ; AC = 4 ; BC = ………? ; AH = ………?
   b) AB = 5 ; BC = 13 ; AC = ………? ; AH =………?
   c) AC = 24 ; BC = 25 ; AB = ………? ; AH = ………?

C. Propriété réciproque de Pythagore

<u>**Activité 4**</u> : Dans l'activité 2, nous avons démontré que si ABC est un triangle rectangle en A, alors **$AB^2 + AC^2 = BC^2$**. Réciproquement, si un triangle ABC vérifie **$AB^2 + AC^2 = BC^2$,** pouvons-nous dire que ABC est un triangle rectangle en A ? Nous allons le prouver.

ABC est un triangle dont les longueurs des côtés vérifient : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

1) Utilise la propriété directe de Pythagore pour calculer le carré de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle MNP rectangle en M tel que MN = AB, MP = AC.
2) Que peux-tu alors dire des longueurs BC et NP ?
3) Justifie que les triangles ABC et MNP sont superposables. Quelle est alors la nature du triangle ABC et qui est le sommet particulier de ce triangle ?
4) **Tire des activités 2 et 4 une propriété caractéristique du triangle rectangle.**

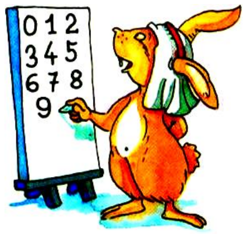
Je contrôle mes connaissances
Quelques calculs simples pour vérifier que t'as bien compris !...

Activité 5 : ABC est un triangle. Les longueurs de ses côtés sont AB, AC et BC.
Dans chacun des cas suivants, précise si le triangle ABC est rectangle ou non. Dans le cas où on a un triangle rectangle, précise le sommet de l'angle droit.

a) AB = 3, AC = 5, BC = 4
b) AB = 4,5, AC = 6, BC = 7,5
c) AB = 4, AC = 14, BC = 11
d) AC = 39, BC = 38, AB =15
e) AC = 60, BC = 11, AB = 61

D. Quelques valeurs intéressantes pour avoir un triangle rectangle : les triplets de Pythagore !...

Activité 6 :
D'après le théorème de Pythagore, un triangle rectangle ABC de sommet A est un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Partant de cette relation, on peut chercher des dimensions de triangle qui donnent des triangles rectangles. Pour toi, j'ai relevé des valeurs intéressantes pour les côtés de l'angle droit mais il te faudra calculer l'hypoténuse !.... Ce sera aussi pour toi l'occasion de revoir la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel.



AB	AC	BC
3	4	
5	12	

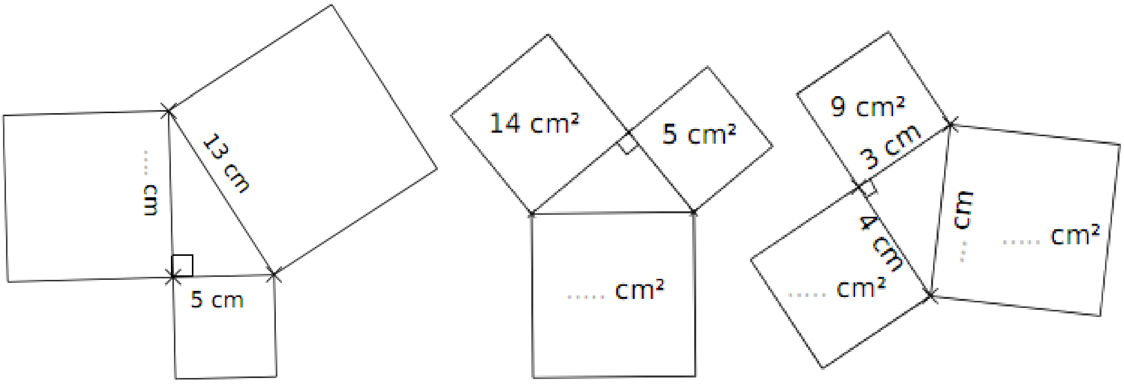
AB	AC	BC
7	24	
8	15	

AB	AC	BC
13	84	
16	30	

J'applique mes nouvelles connaissances

Exercice 1:

Dans chaque figure, un carré est dessiné sur chaque côté du triangle rectangle.
Détermine la mesure manquante (aire ou longueur).



Exercice 2:

ABCD est un losange de centre O tel que AC = 6 cm et BD = 8 cm.

a. Construis le losange ABCD.

b. Calcule AB puis le périmètre de ce losange.

II. APPLICATIONS DES PROPRIETES DE PYTHAGORE

A la fin des activités de cette fiche, je dois être capable d' :
- énoncer les relations métriques dans un triangle rectangle
- utiliser ces relations pour calculer des longueurs, des distances dans des situations de la vie quotidienne

A. Révision

1. ABC est un triangle rectangle en A.
   En utilisant la propriété de Pythagore, écris une relation entre les longueurs AB, AC, BC.
2. Les longueurs des côtés d'un triangle MNP vérifient $NM^2 + NP^2 = MP^2$.
   Précise la nature de ce triangle et le sommet particulier de ce triangle.

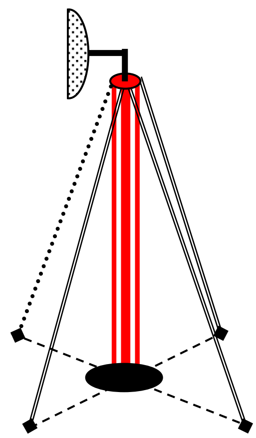
B. Application du théorème de Pythagore

Pour commencer, voici pour toi un précieux outil !...

Puisqu'on parle « CARRE », pour t'aider à résoudre les exercices proposés, voici le tableau des carrés des nombres
0 à 99, fais en bon usage pour traiter les exercices proposés !....

D \ U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Exercice 1 : *Des antennes bien stables.*
L'antenne de notre émetteur local est placée sur un pylône vertical de 24m de haut. La pylône est stabilisée par 4 câbles disposés symétriquement et dont les fixations au sol sont situés à 10m du centre du pylône (voir schéma ci-contre)



1) Calcule la longueur minimale à prévoir pour chaque câble.

2) En fait, pour les différents raccords, il faudra prévoir 2 mètres supplémentaires pour chaque ancrage. Calcule alors la longueur effective de câble utilisée.

Exercice 2 : *Une équerre géante*
Cet instrument est utilisé depuis longtemps pour construire des angles droits :

Prends une corde. En laissant un bout pour pouvoir faire un nœud,, marque sur cette corde une unité de longueur en prenant bien soin que ta corde mesure au moins 12 fois l'unité choisie. Ensuite marque sur la corde 3 unités et fais un nœud, puis maque 4 unités puis fais nœud. Enfin marque 5 unités. Une fois ceci fait, noue les deux bouts de la corde à l'endroit des dernières graduations. On obtient ainsi 3 nœuds distants de3, de4 et de 5unités.

Et voilà, tu viens de construire ton équerre géante.

Expliquons comment ça fonctionne.

1) Calcule : 3 + 4 + 5, et ensuite calcule $3^2 + 4^2$ puis 5^2. Utilise la propriété de Pythagore, pour préciser la nature d'un triangle de cotés 3, 4, 5 ?

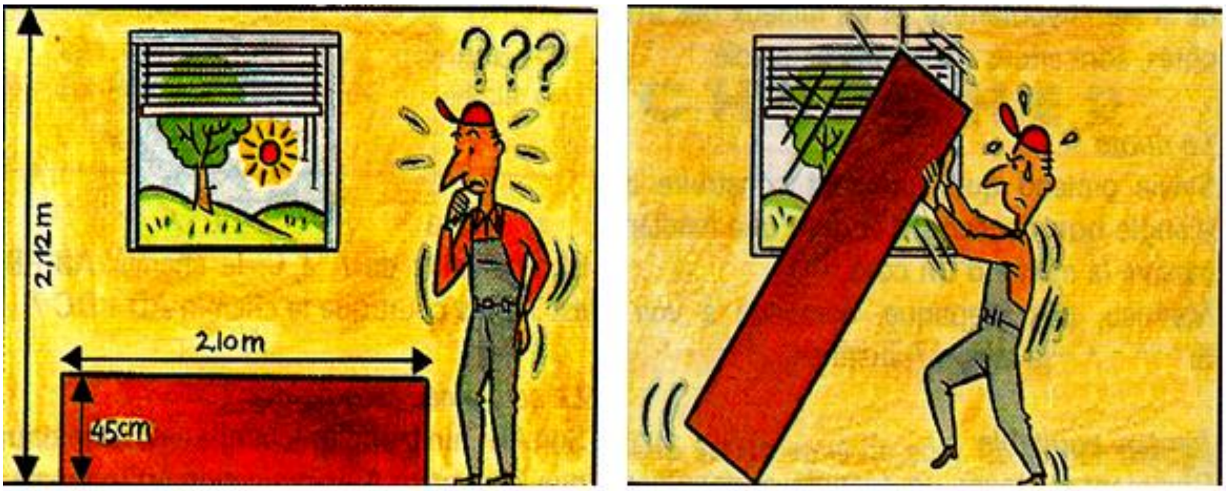
2) Cite parmi les triplets suivants ceux qui constituent une équerre : (5 ; 12 ; 13), (7 ; 15 ; 16), (8 ; 15 ; 17)

Exercice 3 *: L'échelle*

Situation1 : Sur la figure ci-contre, le pied de l'échelle est situé à 1,20m du mur. La fenêtre se trouve à 3,50 m du sol. Calcule la hauteur de l'échelle.

Situation 2 : L'échelle mesure 8,50m et elle est placée à 1,30m du mur. A quelle hauteur se trouve la fenêtre ?

Exercice 4 : Observe les images ci-dessous :



Le plafond est-il assez haut pour que Monsieur Bricoltou mette en place son meuble ? Justifie ta réponse.