

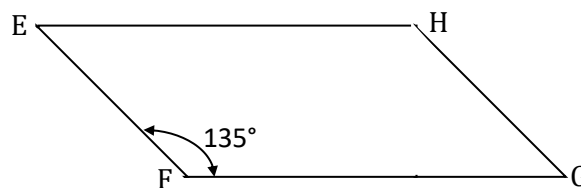
Quelques propriétés sur les angles d'un parallélogramme

Activité 1 :

- Recopie et complète :
 - Un parallélogramme est un **quadrilatère** qui a **les côtés opposés parallèles**.
 - Un parallélogramme est un **quadrilatère** qui a deux côtés **opposés parallèles** et de **même longueur**.
 - Un parallélogramme est un **quadrilatère** dont les diagonales **se coupent** en leur milieu.
- Les figures qui sont des parallélogrammes sont : figure 1, figure 3, figure 5, figure 6, figure 8.

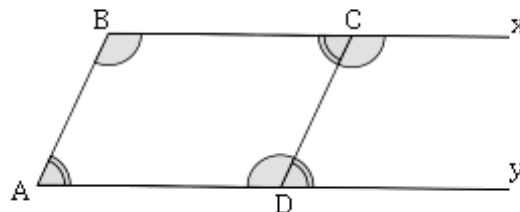
A. Propriété directe

Activité 2 :



- voir figure
- $\text{mes } \hat{F} = \text{mes } \hat{H} = 135^\circ$ et $\text{mes } \hat{E} = \text{mes } \hat{G} = 45^\circ$
Dans un parallélogramme, les angles opposés sont de même mesure.
 - $\text{mes } \hat{E} + \text{mes } \hat{F} = \text{mes } \hat{F} + \text{mes } \hat{G} = \text{mes } \hat{G} + \text{mes } \hat{H} = \text{mes } \hat{H} + \text{mes } \hat{E} = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.
Dans un parallélogramme, les angles consécutifs sont supplémentaires.

Activité 3 :



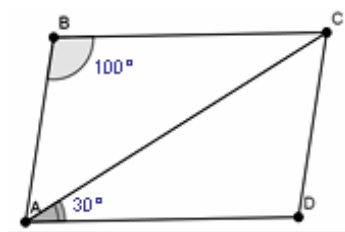
- voir figure
 - En considérant les droites parallèles $(BA) \parallel (CD)$ et la sécante commune (Ay) , on a :
 $\widehat{BAD} = \widehat{CDy}$ (angles correspondants).
 De même, en considérant les droites parallèles $(Ay) \parallel (Bx)$ et la sécante commune (DC) , on a :
 $\widehat{CDy} = \widehat{DCB}$ (angles alternes internes).
 D'où : $\widehat{BAD} = \widehat{CDy} = \widehat{DCB}$.
En particulier : $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$

- b. En considérant les droites parallèles $(BA) \parallel (CD)$ et la sécante commune (Bx) , on a :
 $\widehat{ABC} = \widehat{DCx}$ (angles correspondants).
 De même, en considérant les droites parallèles $(Ay) \parallel (Bx)$ et la sécante commune (DC) , on a :
 $\widehat{DCx} = \widehat{ADC}$ (angles alternes internes).
 D'où : $\widehat{ABC} = \widehat{DCx} = \widehat{ADC}$.
En particulier : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
- c. $\widehat{ADy} = 180^\circ$ (angle plat), donc $\widehat{ADC} + \widehat{CDy} = 180^\circ$.
 Ce qui veut dire que $\widehat{ADC}$ et $\widehat{CDy}$ sont supplémentaires.
- $\widehat{ADC} + \widehat{DCB} = \widehat{ADC} + \widehat{CDy} = 180^\circ$.
 - $\widehat{DCB} + \widehat{ABC} = \widehat{DCB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$
 - $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = \widehat{ABC} + \widehat{DCB} = 180^\circ$
 - $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = \widehat{BAD} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

Activité 4 :

- « Dans un parallélogramme, les angles opposés ont la **même mesure** »
 « Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont **supplémentaires** ».

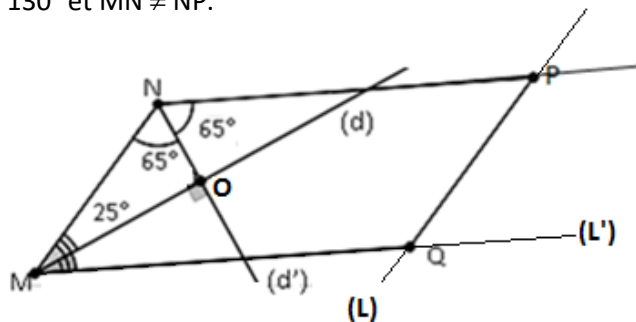
Activité 5 :



$\widehat{CBA} + \widehat{BAD} = 180^\circ$ (angles consécutifs dans un parallélogramme), donc :
 $\widehat{BAD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$; $\widehat{BAC} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$; $\widehat{ADC} = \widehat{CBA} = 100^\circ$; $\widehat{DCA} = \widehat{BAC} = 50^\circ$;
 $\widehat{ACB} = \widehat{CAD} = 30^\circ$; $\widehat{DCB} = \widehat{BAD} = 80^\circ$

Activité 6 :

MNPQ est un parallélogramme tel que $\widehat{N} = 130^\circ$ et $MN \neq NP$.



1.

1^{ère} étape : On trace un segment $[MN]$.

2^{ème} étape : On construit l'angle $\widehat{MNP}$ de 130° avec le rapporteur et on place le point P tel que $MN \neq NP$.

3^{ème} étape : Du point P, on mène la droite (L) parallèle à (MN) et du point M on mène la droite (L') parallèle à (NP). Le point Q est l'intersection de (L) et de (L').

2. MNPQ parallélogramme, donc les angles $\widehat{M}$ et $\widehat{N}$ sont supplémentaires.

D'où : $\widehat{M} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

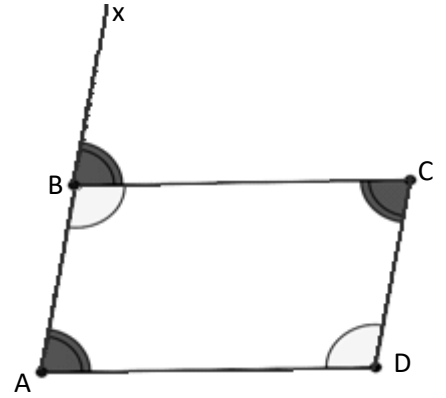
Comme (d) est bissectrice de $\widehat{M}$, $\widehat{OMN} = 25^\circ$. De même, (d') est bissectrice de $\widehat{N}$, $\widehat{ONM} = 65^\circ$.

On en déduit que : $\widehat{MON} = 180^\circ - (65^\circ + 25^\circ) = 90^\circ$. Ce qui montre que le triangle MON est rectangle en O

B. Première propriété réciproque

Activité 7 :

- Les angles consécutifs du quadrilatère sont supplémentaires donc :
 $\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{B} + \text{mes } \hat{C} = 180^\circ$. Par conséquent :
 $\text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{C}$
- Nous savons que $\text{mes } \widehat{DAB} + \text{mes } \widehat{ABC} = 180^\circ$ et
 $\text{mes } \widehat{CBx} + \text{mes } \widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{ABx} = 180^\circ$ (angle plat)
 De ces deux égalités, on peut déduire que $\text{mes } \widehat{DAB} = \text{mes } \widehat{CBx}$.
 Si on considère les droites (BC) et (AD) et la sécante commune (AB), les angles correspondants $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CBx}$ ont même mesure donc d'après la propriété sur les angles formés par deux droites et une sécante commune, les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
- Nous avons : $\text{mes } \widehat{BCD} = \text{mes } \widehat{DAB}$ d'après 1. et $\text{mes } \widehat{DAB} = \text{mes } \widehat{CBx}$ d'après 2. , donc
 $\text{mes } \widehat{BCD} = \text{mes } \widehat{CBx}$.
 Les angles alternes internes $\widehat{CBx}$ et $\widehat{BCD}$ formés par les droites (AB), (CD) et la sécante commune (BC) ont même mesure, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
 Le quadrilatère ABCD a les côtés opposés parallèles, donc ABCD est un parallélogramme.



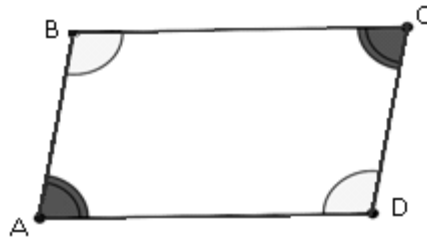
Activité 8 :

Recopie et complète :

« Un quadrilatère dont les angles consécutifs sont supplémentaires est un **parallélogramme**. »

C. Deuxième propriété réciproque

Activité 9 :



- $\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{B} + \text{mes } \hat{C} + \text{mes } \hat{D} = 360^\circ$, mais $\text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{C}$ et $\text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{D}$,
 donc : $2 \times \text{mes } \hat{A} + 2 \times \text{mes } \hat{B} = 360^\circ$, c'est-à-dire $2 \times (\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{B}) = 360^\circ$,
 d'où $\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{B} = 180^\circ$.
 Les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont donc supplémentaires.
- $\text{mes } \hat{B} + \text{mes } \hat{C} = \text{mes } \hat{B} + \text{mes } \hat{A} = 180^\circ$,
 $\text{mes } \hat{C} + \text{mes } \hat{D} = \text{mes } \hat{B} + \text{mes } \hat{C} = 180^\circ$ et
 $\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{D} = \text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{B} = 180^\circ$
 Les angles consécutifs du quadrilatère ABCD sont supplémentaires, donc d'après l'activité 1, ABCD est un parallélogramme.
 « Un quadrilatère dont les angles opposés ont même mesure est un **parallélogramme** »

Activité 10 :

En résumé, on a les propriétés caractéristiques suivantes pour le parallélogramme :

