

# APPLICATION LINEAIRE ET AFFINE

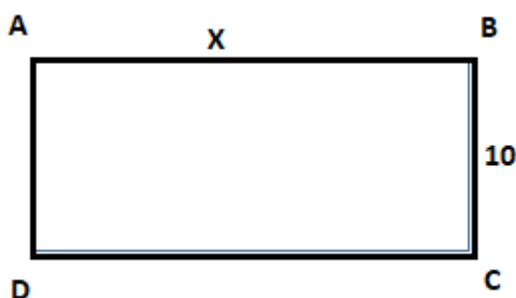
A la fin des activités, je dois être capable d'acquérir les notions d'applications linéaires et affines dans  $\mathbb{R}$

*Découvrir la notion d'application linéaire... !*

***J'observe et je découvre***

**Activité 1 :**

- On considère un rectangle ABCD de largeur  $l = 10$  et de longueur  $L = x$ .  
On désigne par A son aire et par P son périmètre ;



a) Complète le tableau ci-dessous

Longueur	5	9	15	1
Aire ( $\text{cm}^2$ )				
Périmètre				

b) Donne les expressions de A et P en fonction de  $x$ .

c) L'aire A est-elle proportionnelle à  $x$  ?

Le périmètre P est-il proportionnel à  $x$  ?

d) Faire la représentation graphique de l'aire en fonction de la longueur du rectangle. L'axe des abscisses sera gradué de 0 à 20 (1 cm représente 10cm) et l'axe des ordonnées de 0 à 200 (1cm représente 20cm).

e) Recopie et complète les pointillés suivants

A est une fonction de la forme  $(x) = ax$ .

Elle traduit une situation de proportionnalité.  $a$  est.....

Sa représentation graphique est la droite d'équation : ..... issue de.....

f) Faire la représentation graphique de la fonction P (périmètre en fonction de la longueur du rectangle). L'axe des abscisses sera gradué de 0 à 20 (1 cm représente 10cm) et l'axe des ordonnées de 0 à 80 (1cm représente 20cm).

g) Recopie et complète les pointillés suivants

P est une fonction de la forme :  $P(x) = ax +$  .

Elle est la somme d'une fonction linéaire et d'une constante  $b$ .

Sa représentation graphique est une .....

### ***J'assimile une définition***

Une application **linéaire**  $f$  est une application de la forme  $(x) = ax$ , on écrit

$$x \mapsto y = f(x) \text{ avec } f(x) = ax$$

On lit à tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ , on associe  $y = ax$  un élément de  $\mathbb{R}$

Une application **affine**  $f$  est une application de la forme  $(x) = ax + b$

$$x \mapsto y = f(x) \text{ avec } f(x) = ax + b$$

On lit à tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ , on associe  $y = ax + b$  un élément de  $\mathbb{R}$

$y$  est l'image de  $x$  par l'application  $f$  et  $x$  est l'antécédent de  $y$

### ***Je contrôle mes acquis***

#### **Activité 2**

1. Soient  $f, g, h$  et  $k$  des applications définies par.

$$(x) = x(x-10); g(x) = 2x-1; h(x) = 2x$$

$$\text{et } k(x) = 5$$

Lesquelles de ces fonctions sont affines ? linéaires ? Ni affine ni linéaire ?

2. Soit  $f$  une application affine définie par  $(x) = 3x - 1$  et on note  $y = f(x) = 3x - 1$

a. Calcule la valeur de  $y = (x)$  pour  $x = 0$  ;  $x = 2$  ;  $x = -3$  ;  $x = 1/3$

b. Calcule la valeur de  $x$  pour  $y = -1$  ;  $y = 5$  ;  $y = 0$

3. Soit l'application  $f$  définie par  $(x) = \sqrt{3}(x-2)$  quelle est la nature de cette application est-elle ?

Calcule  $(-3)$  ;  $f(0)$  puis  $f(\sqrt{3})$

### ***Propriétés des applications linéaires***

#### **Activité 3**

- Soit  $f$  une application linéaire,  $x \mapsto (x) = ax$ , on a toujours

1)  $(x_1 + y_1) = f(x_1) + f(y_1)$  avec  $x_1$  et  $y_1$  éléments de  $\mathbb{R}$

2) Pour tout réel  $k$  on a  $(kx) = kf(x)$

3)  $f(0) = 0$

### ***Je fais la démonstration :***

- 1) Calcule  $f(x_1 + y_1)$
- 2) Calcule  $f(kx)$  avec  $k$  une constante
- 3) Calcule  $f(0)$

- Le graphe d'une application linéaire dans un repère donné est une droite passant par l'origine.

### **Activité 4 :**

#### ***J'observe et j'agis***

On donne les trois fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x + 2; g(x) = -2x + 1 \text{ et } h(x) = 2$$

- 1) Calcule les valeurs de  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  pour  $x = 0$  ;  $x = 1$  ;  $x = 2$
- 2) Faire une représentation graphique de ces 3 applications dans un même repère. ?
- 3) Qu'est-ce qu'on remarque?

### ***Je retiens les définitions***

- On dit que  $f$  est une application croissante sur  $I$ , si pour tout  $x_1, y_1 \in I$  tels que  $x_1 \leq y_1$ , on a  $f(x_1) \leq f(y_1)$
- On dit que  $f$  est une application décroissante sur  $I$ , si pour tout  $x_1, y_1 \in I$  tels que  $x_1 \leq y_1$ , on a  $f(x_1) \geq f(y_1)$
- On dit que  $f$  est une application constante sur  $I$  si pour tout  $x_1, y_1 \in I$  tels que  $x_1 \leq y_1$ , on a  $f(x_1) = f(y_1)$

### **Remarque :**

Etudier la croissance d'une application sur  $I$ , c'est déterminer si elle est croissante, décroissante ou constante sur  $I$ .

L'ensemble  $I$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R}$  (intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ , ...)

### **Activité 5**

On donne les fonctions suivantes

$$f(x) = -5x; g(x) = 3x$$

Soient  $x_1$  et  $y_1$  tels que  $x_1 \leq y_1$ ,

- 1) Compare  $f(x_1)$  et  $f(y_1)$ , en déduire la croissance de  $f$ .
- 2) Même question pour  $g(x_1)$  et  $g(y_1)$  et en déduire la croissance de  $g$ .

Représenter dans un même repère le graphe de  $f$  et  $g$

### Activité 6 (cas général)

Si  $f$  est une application linéaire de la forme  $f(x) = ax$

- 1) Si  $a > 0$ , étudie la croissance de  $f$ ,
- 2) Si  $a < 0$ , étudie la croissance de  $f$ ,
- 3) Si  $a = 0$ , étudie la croissance de  $f$ .

*Je recopie et complète la propriété caractéristique d'une application linéaire suivante*

### Activité 7

Soit  $f(x) = ax$  une application linéaire

- Si  $a > 0$  alors  $f$  est une application .....
- Si  $a = 0$  alors  $f$  est une application .....
- Si  $a < 0$  alors  $f$  est une application .....

### Activité 8

On donne les applications suivantes :

$$f(x) = -3(2x + 1) \text{ et } g(x) = \frac{2x-1}{4}$$

$f$  est-elle croissante ou décroissante ?

- a)  $g$  est-elle croissante ou décroissante ?

### Activité 9 (cas général)

Soit  $f$  est une application affine de la forme  $f(x) = ax + b$

- 1) Si  $a > 0$ , étudie la croissance de  $f$ ,
- 2) Si  $a < 0$ , étudie la croissance de  $f$ ,
- 3) Si  $a = 0$ , étudie la croissance de  $f$ .

*Je recopie et complète la propriété caractéristique d'une application linéaire suivante*

### Activité 10

Soit  $f(x) = ax + b$  une application affine

- Si  $a > 0$  alors  $f$  est une application .....
- Si  $a = 0$  alors  $f$  est une application .....
- Si  $a < 0$  alors  $f$  est une application .....

## *J'applique mes connaissances à la vie quotidienne*

### Activité 11

Des élèves ont acheté des bananes qui coutent 100 Ar le tas. Chaque élève a acheté un sachet plastique au prix de 50 Ar pour apporter leurs bananes.

Désignons par  $x$  le nombre de tas de bananes achetés et par  $y$  le montant d'argent à payer

1. Ecrire la relation entre  $x$  et  $y$
2. Recopie et complète les tableaux ci-dessous :

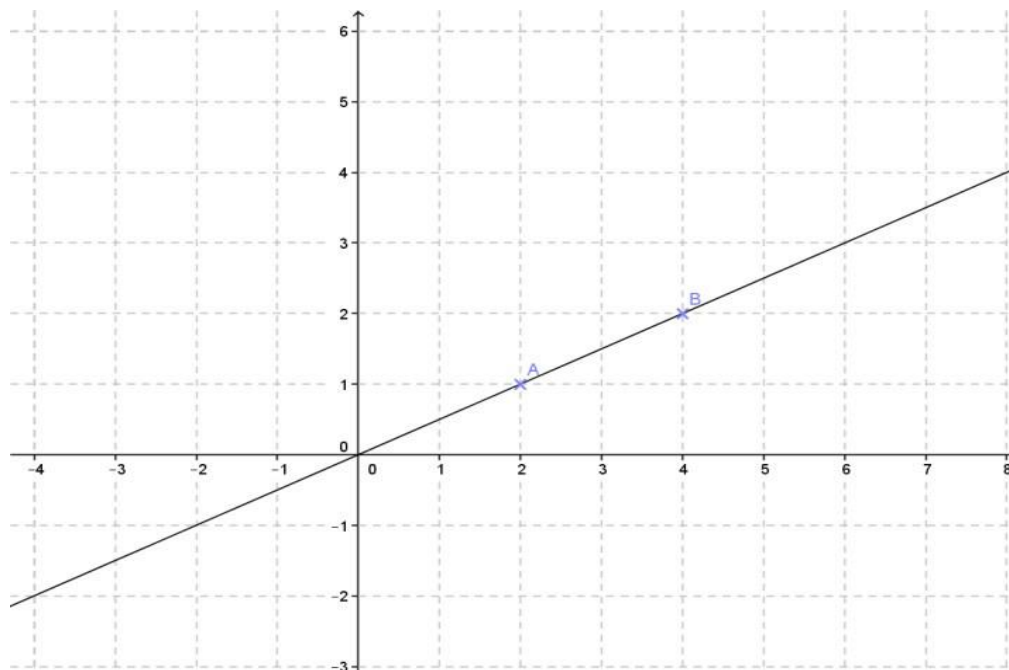
#### 1<sup>er</sup> cas :

Nom élève	Quantité chetée	Montant à payer
Rakoto	02	
Rasoa	05	
Kenny	07	
Jao	17	

#### 2<sup>ème</sup> cas :

Nom élève	Quantité achetée	Montant à payer
Djaomalaza		350 Ar
Nirina		150 Ar
Vola		450 Ar
Rasoa		950 Ar

### Activité 12

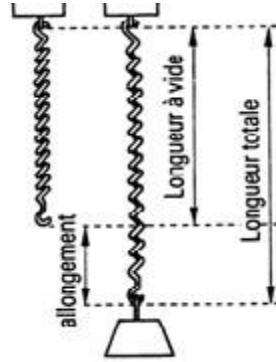


La droite  $(AB)$  ci-dessus représente le graphe d'une application linéaire  $f$ .

- 1) Détermine le coefficient directeur de  $f$ , en déduire l'expression de  $f$ .
- 2) L'application  $f$  est-elle croissante ? justifie votre réponse

### Activité 13: Application à la physique

Un ressort à spires non jointives a une longueur à vide de 25 cm. Il s'allonge de 1 cm pour une masse de 50 g, et l'allongement est proportionnel à la masse qu'il supporte.



#### I Fonction linéaire

##### Activité :

Notons  $a(x)$  l'allongement (en cm) du ressort en fonction de la masse  $x$  (en g). 1°) Complète le tableau suivant :

$x$	0	100	350		333
$a(x)$				6,7	

2°) Exprime  $a(x)$  en fonction de  $x$ .

3°) Calcule en utilisant cette relation  $a(60)$ ,  $a(600)$ ,  $a(860)$ .

4°) Détermine l'allongement pour une masse de 450 g ; puis la masse qu'il faut accrocher pour obtenir un allongement de 15 cm,

#### II Fonction affine

Notons  $l(x)$  la longueur totale du ressort (en cm) en fonction de la masse  $x$  (en g) 1°) Complète le tableau suivant :

$x$	0	100	450	650
$l(x)$				

2°) Exprime  $l(x)$  en fonction de  $x$ .

3°) Calcule en utilisant cette relation :  $l(150)$  ;  $l(1000)$ .

4°) Détermine graphiquement la masse qu'il faut pour obtenir une longueur de 35 cm ;