

APPLICATION DES PPCM et PGCD

Activité 1 :

- 1) Un entier a est multiple d'un entier b si $a = n \times b$, où n est un nombre naturel.
- 2) Si a est un multiple de b , b est un diviseur de a .
- 3) Un multiple commun de trois nombres a, b, c est un entier qui est à la fois multiple de a , multiple de b et multiple de c .
- 4) PPCM ($a ; b ; c$) désigne le plus petit des multiples communs non nuls de a, b, c .
PPCM (12 ; 30 ; 75) est le produit de **tous les facteurs premiers des trois décompositions** de 12, 30 et 75, **chaque facteur étant affecté du plus grand exposant** apparu dans les trois décompositions.
 $12 = 2^2 \times 3 ; 30 = 2 \times 3 \times 5 ; 75 = 3 \times 5^2$, donc $\text{PPCM}(12 ; 30 ; 75) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$
- 5) « Les multiples communs de 2 ou plusieurs nombres sont les multiples de leur **PPCM** »
- 6) Un diviseur commun de trois nombres a, b, c est un entier qui est à la fois diviseur de a , diviseur de b et diviseur de c .
- 7) PGCD ($a ; b ; c$) désigne le plus grand des diviseurs communs de a, b, c .
PGCD (12 ; 30 ; 75) est le produit des **facteurs premiers communs aux trois décompositions** de 12, 30 et 75, **chaque facteur étant affecté du plus petit exposant** apparu dans les trois décompositions.
 $12 = 2^2 \times 3 ; 30 = 2 \times 3 \times 5 ; 75 = 3 \times 5^2$, donc $\text{PGCD}(12 ; 30 ; 75) = 3$
- 8) « Les diviseurs communs de 2 ou plusieurs nombres sont les diviseurs de leur **PGCD** »

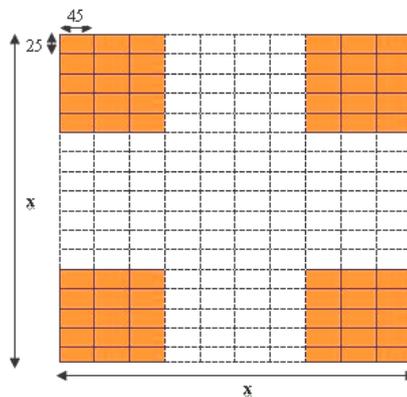
Activité 2 :

2) x est un multiple de 25 car : $x = 25 \times$ nombre de carreaux suivant la largeur.

x est un multiple de 45 car : $x = 45 \times$ nombre de carreaux suivant la longueur.

x est un multiple commun de 25 et de 45.

3) Méthode 1 : Dressons la table des multiples de 25 et 45 et cherchons les multiples communs :



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375
45	45	90	135	180	225	270	315	360	405	450	495	540	585	630	675

x	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
2	40	42	45	47	50	52	55										
5	0	5	0	5	0	5	0	575	600	625	650	675	700	725	750	775	800
4	72	76	81	85	90	94	99	103	108	112	117	121	126	130	135	139	144
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0

Comme x est compris entre 500cm et 800cm, la seule solution possible est 675cm, soit **6,75m**

Méthode 2 : Une solution plus rapide

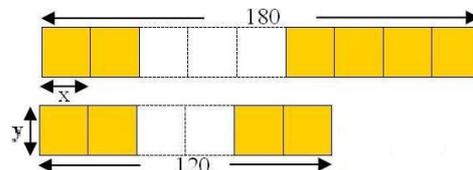
On sait que les multiples communs de 25 et 45 sont les multiples de leur PPCM. Mais $25 = 5^2$ et $45 = 5 \cdot 9$, donc $\text{PPCM}(25 ; 45) = 5^2 \cdot 9 = 225$. Les multiples successifs non nuls de 225 sont 225, 450, 675, 900,

Comme x est compris entre 500cm et 800cm, la seule solution possible est 675cm, soit **6,75m**

Activité 3 :

Question 1 :

- On demande de calculer les longueurs possibles des morceaux
- Je choisis comme unité le centimètre pour avoir des entiers naturels.
- Je désigne par x la mesure du morceau et je fais un dessin représentant les deux planches.



- d) Comme on a un nombre entier de morceaux, x est un diviseur de 120 et un diviseur de 180.
- e) x est donc un diviseur commun de 120 et 180, c'est-à-dire un diviseur de $\text{PGCD}(120 ; 180)$.
 Mais $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ et $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, donc $\text{PGCD}(120 ; 180) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
 x est donc un diviseur de $60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$, donc les diviseurs de 60 sont :
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. **Les longueurs possibles des morceaux sont : 10, 15, 20, 30, 60 cm.**

Question 2 :

- a) Les morceaux sont des carrés
- b) Un morceau étant un carré, son côté doit être compris entre 17 et 22. La seule valeur possible est **20cm**.
- c) Le nombre de morceaux obtenus est $(120 + 180) / 20 = 15$

Activité 4 :

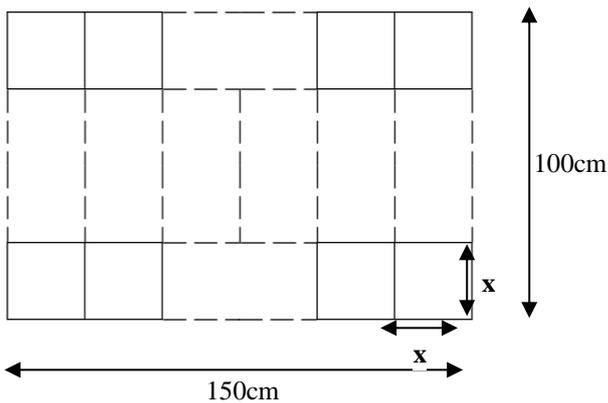
Je décris la démarche à suivre pour la résolution des problèmes :

Etape 1 : Je nomme par une lettre la valeur cherchée (inconnue)

Etape 2 : Je trouve la relation entre l'inconnue et les valeurs données dans l'énoncé (ici on est dans le cas où l'inconnue est un multiple ou diviseur des valeurs connues)

Etape 3 : J'utilise les techniques de calcul et les propriétés du PPCM et du PGCD par rapport aux multiples et diviseurs communs de deux ou plusieurs nombres.

Activité 5 :



1) Appelons x la longueur en centimètres du côté du

Comme on ne coupe pas les carreaux, on a des nombres entiers de carreaux suivant la longueur et suivant la largeur, donc :

- 100 est un multiple de x et x est un diviseur de 100
- 150 est un multiple de x et x est un diviseur de 150
 x est donc un diviseur commun de 100 et 150, c'est-à-dire un diviseur de $\text{PGCD}(100 ; 150)$.

Comme $100 = 2^2 \cdot 5^2$ et $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, on a :

$$\text{PGCD}(100 ; 150) = 2 \cdot 5^2 = 50$$

Le côté du carreau est donc un diviseur de 50.

$$50 = 1 \times 50 = 2 \times 25 = 5 \times 10$$

Les diviseurs de 50 sont donc : 1, 2, 5, 10, 25, 50

Les mesures possibles du côté du carré en centimètres sont : 10, 25 et 50

2) Le père de Boto utilise des carreaux de 25cm de côté.

Pour trouver le coût des carreaux à utiliser, il doit connaître le **nombre de carreaux** à acheter ainsi que le **prix d'un carreau**.

a) Le nombre de carreaux :

Nombre total de carreaux = Nombre de carreaux suivant la longueur x Nombre de carreaux suivant la largeur

$$\text{Nombre de carreaux suivant la longueur} = 150 / 25 = 6$$

$$\text{Nombre de carreaux suivant la largeur} = 100 / 25 = 4$$

$$\text{Nombre total de carreaux} = 6 \times 4 = 24$$

b) Le prix d'un carreau :

La lecture de la partie visible de la facture ne permet pas de lire directement le prix d'un, mais elle nous donne :

- la somme totale payée lors de l'achat : « QUATRE CENT MILLE ARIARY » (400 000 Ar.) ;
- les prix en Ar. des quatre articles autres que les carreaux dont le total est de : $3000 + 100\,000 + 126\,000 + 135\,000 = 364\,000$.
- le nombre de carreaux achetés : 32

Le prix total en Ar. des 32 carreaux est : $400\ 000 - 364\ 000 = 36\ 000$

Le prix en Ar. d'un carreau est de : $36\ 000 / 32 = 1\ 125$

Remarque : On peut aussi mettre en équation le problème et le résoudre de cette façon :

Appelons x le prix d'un carreau, alors :

- le prix de 32 carreaux est : $32x$
- Le montant total de la facture est de 400 000, donc :

$$32x + 3\ 000 + 100\ 000 + 126\ 000 + 135\ 000 = 400\ 000$$

$$32x = 400\ 000 - 3\ 000 - 100\ 000 - 126\ 000 - 135\ 000$$

$$32x = 36\ 000$$

$$x = 36\ 000 / 32 = 1\ 125$$

c) Le coût en Ar. des carreaux nécessaires pour couvrir le devant de la porte du père de Boto est de :

$$1\ 125 \times 24 = 27\ 000$$

**Pour acheter les carreaux nécessaires pour couvrir le devant de sa porte, le père de Boto doit payer
27 000 Ar.**