

# EQUATION ET INEQUATION

A la fin des activités, je dois être capable de :

- définir un système de deux équations à deux inconnues réelles
- reconnaître un système de deux équations du premier degré à deux inconnues
- justifier qu'un couple de nombres est solution d'un système
- acquérir les techniques de :
  - résolution d'un système d'inéquations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  - représentation graphique des solutions

## A. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

*Je révise*

### Activité 1

On donne l'équation:  $3x - 12 = 9 - 4x$

- Détermine : l'inconnue, le premier membre de l'égalité, le second membre de l'égalité
- Vérifie si -1 ; 0 et 1 sont des solutions ou non
- Résous alors l'équation

***Lorsqu'il y a deux inconnues, une seule équation ne suffit pas ...***

***J'observe et je découvre***

### Activité 2

Une plate-bande est délimitée par les trois segments dessinés sur la figure.

- Exprime en fonction de  $x$  et  $y$  la longueur totale des segments en gras.
- Sachant que cette longueur vaut 15 m, Quelle relation peux-tu en déduire sur  $x$  et  $y$  ?

*Nous allons voir que ce seul renseignement ne suffit pas pour connaître  $x$  et  $y$ .*

- Vérifie que  $x = 1,5$  et  $y = 12$  est une solution du problème.
- Si on prend  $x = 2$ , quelle valeur de  $y$  serait la solution du problème ?



***On dit alors que les couples  $(1,5 ; 12)$ ,  $(2,11)$  est une solution de l'équation à deux inconnues  $2x + y = 15$***

- 3- Parmi les couples suivants, quels sont les couples  $(x ; y)$  qui vérifient la relation  $2x + y = 15$  ?

$$(10 ; 100) ; (1,05 ; 12,9) ; (32 ; 97) ; \left(\frac{17}{30} ; \frac{433}{30}\right)$$

Pour une valeur donnée de  $x$ , quelle est la valeur de  $y$  ?

- 4- Complète alors le tableau:

x	0	7,5	9	-2	3
y					

- 5- Trace un repère orthogonal en prenant pour unités :
- a- Sur l'axe des abscisses : 1cm pour une longueur de 1m.
  - b- Sur l'axe des ordonnées : 1cm pour une longueur de 1,5m.
- Représente graphiquement ces couples qui vérifient cette relation.  
Quelle remarque fais-tu sur les points représentant les solutions?
- 6- Trace la droite contenant les points  $M(x ; y)$  vérifiant la relation  $2x + y = 15$ .
- 7- Sachant que  $x$  et  $y$  sont des nombres positifs ou nul, colorie en rouge la partie de cette droite qui représente l'ensemble des solutions de ce problème.

### *Je retiens l'essentiel*

Quand on a une seule équation à deux inconnues  $x$  et  $y$ , on exprime l'une des inconnues ( $y$ ) en fonction de l'autre ( $x$ ).

Cette relation permet de calculer la valeur de  $y$  pour chaque valeur donnée de  $x$ .

## **B. Méthode de résolution d'un système d'équation**

### 1. Méthode de résolution par substitution

#### **Activité 3**

Voici un système (S) de deux équations à deux inconnues  $x$  et  $y$  :

$$(S) \begin{cases} x + y = 15 & : \text{équation (1)} \\ 2x + 5y = 57 & : \text{équation (2)} \end{cases}$$

- 1) Déduit la valeur  $y$  en fonction de «  $x$  » en utilisant l'équation (1).
- 2) Dans l'équation (2), remplace «  $y$  » par sa valeur trouvée dans la question 1-.  
On obtient alors une équation où le seul inconnu est «  $x$  ». Résous cette équation.
- 3) En déduire la valeur de  $y$ .
- 4) Vérifie que le couple solution trouvé  $(10 ; 11)$ , est solution du système.

Dans cette démarche, nous avons substitué  $y$  par sa valeur suivant  $x$ . Nous disons qu'il s'agit d'une « méthode par substitution ».

## Je contrôle mes connaissances

### Activité 4

Résoudre par substitution le système:  $\begin{cases} -x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$

## 2. Méthode de résolution par combinaison

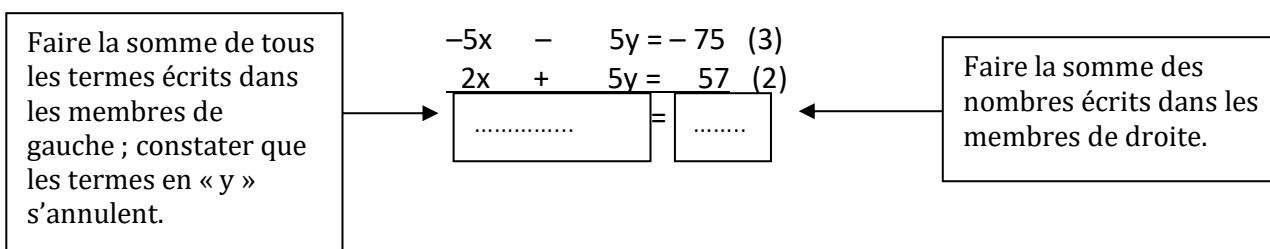
### Activité 5

Plutôt que de résoudre par substitution, nous allons procéder autrement ; mais le but reste le même : obtenir une équation où ne figure plus qu'une seule inconnue. Pour y arriver, nous pouvons procéder ainsi :

- 1- Comme je sais que si  $a = b$  alors  $c \times a = c \times b$ ,  
je peux multiplier une égalité par un même nombre.  
Multiplie alors par « -5 » chaque membre de l'équation (1) ; on obtient une nouvelle équation que l'on va noter comme équation (3).

Complète : ..... $x$  ... ..... $y$  = ..... (3)

- 2- Je sais aussi que si  $a = b$  et  $c = d$ , alors  $a + c = b + d$ .  
Qu'est-ce que tu obtiens en ajoutant membre à membre les équations (3) et (2) :



*On obtient une équation à une seule inconnue « x ». Cette équation a été obtenue par combinaison de deux équations, aussi cette méthode s'appelle : « méthode par combinaison ».*

- 3- Résoudre cette équation puis, ayant trouvé la valeur de « x », déduire celle de « y ».

### Activité 6

Résous par combinaison le système d'équations:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 3,5 \\ x - 4y = -5,5 \end{cases}$$

### 3. Méthode de résolution graphique

#### Activité 7

Visualisons sur un graphique, la résolution du système précédent.

- 1- Trace un repère orthogonal avec pour unité 0,5 cm.
- 2- Vérifie que les couples solutions de chaque équation du système (S) sont représentés par les droites d'équations :  $y = 15 - x$  (D1) et  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{57}{5}$  (D2).
- 3- D'après le graphique, comment trouver la solution du système (S) ?

*Je contrôle mes connaissances*

#### Activité 8

Soit (S) le système suivant : 
$$\begin{cases} 10x + 9y = 30 & (1) \\ 11x + 10y = -15 & (2) \end{cases}$$

### C. **RESOLUTION DU SYSTEME D'INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

#### 1) Ensemble de solutions d'une inéquation à deux inconnus.

*J'observe et je découvre*

#### Activité 9

Soient : l'équation à deux inconnues :  $2x + y - 4 = 0$ . (1)

l'inéquation à deux inconnues :  $2x + y - 4 < 0$ . (2)

l'inéquation à deux inconnues :  $2x + y - 4 > 0$ . (3)

1. Pour chacune de ces trois relations, exprime « y » en fonction de « x ».
2. Trace la droite (D<sub>1</sub>) d'équation  $y = -2x + 4$  dans un repère orthogonal.
3. Après le traçage, la droite (D<sub>1</sub>) divise le plan en combien de parties?
4. Place un point quelconque A sur la droite (D<sub>1</sub>). Nous noterons « x » son abscisse et « y » son ordonnée.
5. Trace la droite passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.
6. Place un point M au dessus de A et un point N au dessous de A sur cette droite. Nous noterons y<sub>M</sub> et y<sub>N</sub> leurs ordonnées.  
Que peux-tu dire de y et de y<sub>M</sub> ; de y et de y<sub>N</sub>.
7. Complète : M est au dessus de (D<sub>1</sub>) si  $y_M \dots \dots - 2x_M + 4$   
N est au dessous de (D<sub>1</sub>) si  $y_N \dots \dots - 2x_N + 4$   
P est sur (D<sub>1</sub>) si  $y_P \dots \dots - 2x_P + 4$

Recopie et complète :

Une droite d'équation  $y = ax + b$  régiona le plan en 3 parties :

- Les points de la droite vérifient  $y \dots \dots ax + b$  (1)
- Les points situés au dessus de la droite vérifient  $y \dots \dots ax + b$  (2)
- Les points situés au dessous de la droite vérifient  $y \dots \dots ax + b$  (3)

**Remarque :**

*Si un point de la région vérifie une relation alors tous les points de cette région vérifient la même relation.*

*Je teste mes connaissances*

**Activité 10**

Soit l'inéquation :  $x + y - 1 > 0$ .

Résous cette inéquation et hachure la partie qui n'est pas solution.

**2) Résolution d'un système d'inéquations à deux inconnus.**

*Je réinvestis*

**Activité 11**

Dans l'activité 1, notre contrainte était d'avoir  $2x + y - 4 < 0$  (1). Plusieurs solutions étaient alors possibles. Ajoutons maintenant une autre contrainte:  $x - y - 5 \geq 0$  (2). Quelles sont alors les solutions possibles?

1. Appliquer la règle adoptée dans l'activité 1 pour trouver les solutions de cette inéquation dans le même repère.
2. Pour le système : 
$$\begin{cases} 2x + y - 4 < 0 \\ x - y - 5 \geq 0 \end{cases}$$

Pour la contrainte  $2x + y - 4 < 0$ , on a :  $y < -2x + 4$ , ce qui correspond à la région au dessous de la droite ( $D_1$ ).

De la même façon  $x - y - 5 \geq 0$  équivaut à :  $y \leq x - 5$ , ce qui correspond à la droite et à la région au dessous de la droite ( $D_2$ ) d'équation  $y = x - 5$ .

La solution est l'intersection des deux régions citées plus haut.

Quelle est la partie solution pour ce système.

*J'applique mes connaissances*

**Activité 12 :**

Sois le système S:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ -2x + y = -10 \end{cases}$$

**1. Choisis la bonne réponse**

A : S est un système de 2 équations à trois inconnues.

B : Le couple  $(x, y)$  est une solution du système S s'il vérifie une des deux égalités.

C : Résoudre S c'est trouver une valeur  $x$  et une valeur  $y$  qui vérifient les deux équations simultanément.

D : L'accolade du système S ne sert à rien

**2. Choisis la bonne réponse**

E : Le système S admet pour solution  $(1 ; 1)$

F : Le système S n'a pas de solution

G : Le système S admet pour solution  $x = 3$  et  $y = -4$

H : Le système S admet une infinité de solutions

### Activité 13

Résoudre le système d'inéquation : 
$$\begin{cases} 2x + y - 4 > 0 \\ x - y - 5 \leq 0 \end{cases}$$

## ***D. RESOLUTION DE PROBLEMES SE RAPPORTANT A DES EQUATIONS OU INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$***

### ***Je révise***

#### Activité 14

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $2x + 3 = 0$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $2x - 4 < 0$

***Les étapes à respecter pour trouver les solutions d'un problème mathématique !***

#### **1) Problème se ramenant à la résolution d'une équation**

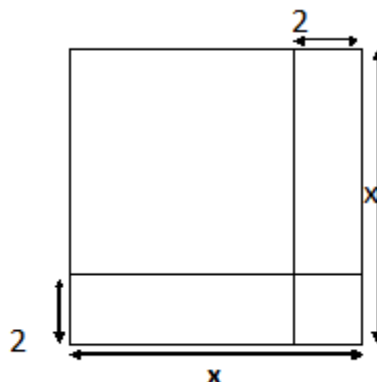
#### Activité 15

Si on diminue de 2 cm le côté d'un carré, son aire

diminue de  $20 \text{ cm}^2$ . Quelle est la mesure initiale du côté du carré.

### ***Je découvre les étapes de la résolution d'un problème***

#### **Etape 1 : Lecture du sujet :**



1. Lis attentivement l'énoncé
2. Ecris une à une chaque information donnée par l'énoncé
3. Qu'est-ce qu'on demande dans la question ?

### **Etape 2 : Traduction mathématique du problème**

Dans la question, il s'agit de calculer la mesure initiale du côté du carré.

Cela correspond au choix de l'inconnue : appelons «  $x$  » cette inconnue qui est la mesure initiale du côté du carré.

1. Analysons et traduisons chaque information fournie par l'énoncé par des expressions ou des relations.
  - a. Quelle est la longueur initiale du côté du carré ?
  - b. Quelle est l'aire initiale du carré.
  - c. Que devient la longueur quand on diminue le côté de 2cm ?
  - d. Que devient l'aire du carré dans ce cas ?

### **Etape 3 : Recherche de la solution**

- De quel type est l'inéquation obtenue ?
- Résous l'équation pour trouver «  $x$  ».
- Vérifie que la valeur trouvée satisfait les informations fournies par le sujet.

## **J'applique mes connaissances**

### **Activité 16**

La somme de trois nombres entiers naturels, impairs et consécutifs est égale à 495. Trouve ces nombres.

### **2) Problème se ramenant à la résolution d'une inéquation**

### **Activité 17**

Maria passe un examen comportant 3 épreuves : Mathématiques (coefficient 4) - Français (coefficient

3) - Anglais (coefficient 2). Elle a obtenu 12 en Maths ; 08 en Français.

Quelle note en Anglais doit-elle obtenir pour avoir au moins la moyenne de 10 ?

### **Etape 1 : Lecture du sujet :**

1. Lis attentivement l'énoncé
2. Ecris une à une chaque information donnée par l'énoncé
3. Qu'est-ce qu'on demande dans la question ?

### **Etape 2 : Traduction mathématique du problème**

Dans la question, il s'agit de calculer la note d'anglais que Maria doit obtenir. Cela correspond au choix de l'inconnue : appelons «  $x$  » cette inconnue qui est la note en Anglais.

1. Analysons et traduisons chaque information fournie par l'énoncé par des expressions ou des relations.
  - a. Quelles sont les matières de l'examen ?
  - b. Quels sont les coefficients de chaque matière ?
  - c. Quelles sont ses notes dans chaque matière ?
  - d. Quelle est alors sa moyenne ?
  - e. Quelle relation doit satisfaire cette moyenne ?
2. Dédus de cette traduction mathématique une équation ou inéquation permettant de calculer «  $x$  »

### **Etape 3 : Recherche de la solution**

- De quel type est l'inéquation obtenue ?
- Résous l'équation pour trouver «  $x$  ».
- Vérifie que la valeur trouvée satisfait les informations fournies par le sujet.

### ***J'applique mes connaissances***

#### **Activité 18**

La somme de trois nombres entiers naturels, impairs et consécutifs est égale à 495. Trouve ces nombres.

#### **Activité 19**

Dans une boulangerie, Njara a acheté 4 croissants et 3 pains au chocolat pour 5650 Ar. Lina a acheté 3 croissants et 5 pains au chocolat pour 6850 Ar. Retrouve le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat.

#### **Activité 20**

Un champ rectangulaire a pour longueur 80 m. Le cultivateur doit décider de sa largeur  $x$  exprimée en mètres. Il souhaite que le périmètre de ce champ soit inférieur à 240 m. En même temps, il voudrait que son aire soit supérieure à 3000 m<sup>2</sup>.

1. Traduis ces deux informations par 2 inéquations
2. Résous ces inéquations et indique les valeurs possibles de la largeur  $x$  du champ.