GEOMETRIE VECTORIELLE

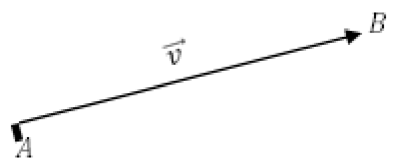
A la fin des activités, je dois être capable de (d') :

- maîtriser les techniques élémentaires des calculs vectoriels
- mettre en œuvre les techniques élémentaires pour l'étude vectorielle des situations rencontrées en géométrie pure

Notions sur les vecteurs

J'apprends un peu de vocabulaire

Un vecteur $\vec{v}$ d'origine A, d'extrémité B, de longueur AB , de direction la droite (AB) (ou support) et de sens de A vers B est noté $\overrightarrow{AB}$



Je révise les notions vues en classe de 4ème

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  - ✓ ont la même longueur,
  - ✓ ont de direction parallèle,
  - ✓ sont de même sens.
- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si la translation $t_{\vec{u}}$ définie par le vecteur $\vec{u}$ est égale à la translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur $\vec{v}$ ($t_{\vec{u}}$ = $t_{\vec{v}}$).
- A, B et C sont trois points du plan, la relation de Chasles est donnée par
  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

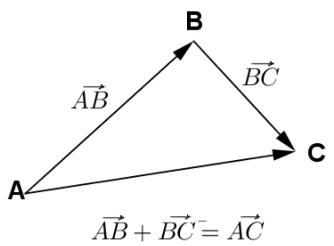


Figure 1 les points A, B et C sont non alignés

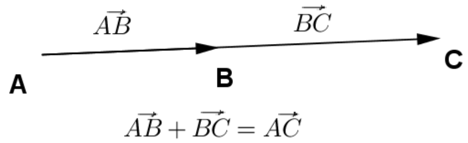
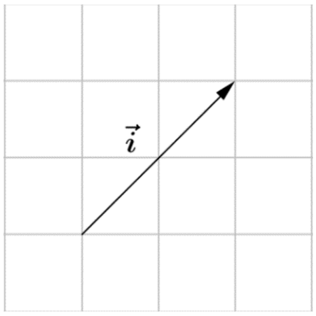


Figure 2 les points A, B et C sont alignés

Activité 1 :

Représenter graphiquement les vecteurs suivants

- vecteur $\vec{u} = \vec{\imath}$
- vecteur $\vec{v}$ opposé au vecteur $\vec{\imath}$
- Un vecteur $\vec{w} = 2\vec{\imath}$



Activité 2 :

Copie et Complète les pointillés.

1) $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KM} = \cdots$

2) $\overrightarrow{PQ} = \ldots + \overrightarrow{RQ}$

3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots B}$

4) $\overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{\ldots F} + \overrightarrow{\ldots G}$

Activité 3 :

Donne une expression simple des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{m}$

1) $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI}$

2) $\vec{v} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$

3) $\vec{w} = \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

4) $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$

Activité 4 :

A et B sont deux points du plan

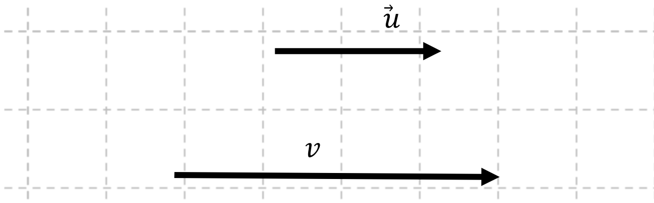
Démontre que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ en admettant qu'on a toujours $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Somme de deux vecteurs

J'observe et je découvre

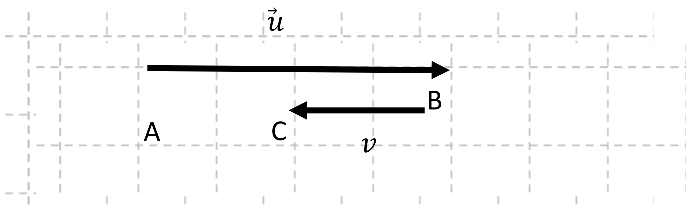
Activité 5 *(les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens)*

1) Reproduis sur ton cahier les deux vecteurs colinéaire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-dessous



2) Construis le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ qui est égale à v et a comme origine l'extrémité du vecteur $\vec{u}$
3) **3)** En déduire que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \overrightarrow{v_1}$
4) Construis le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$
5) Qu'est-ce qu'on peut dire du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$? (sens, direction, longueur)

Activité 6 : *(les deux vecteurs sont colinéaires et de sens différents)*



1) Ecrire à l'aide des points A, B et C les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{v}$
2) En déduire l'expression de la somme $\vec{u} + \vec{v}$
3) Qu'est-ce qu'on peut dire du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$? (sens, direction, longueur)
4) Comment on construit le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide d'une règle et un compas ?

Activité 7 : *(les deux vecteurs ne sont pas colinéaires)*

1) Reproduis les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-dessous.

1) Construis un vecteur $\overrightarrow{v_1}$ qui est égale à $\overrightarrow{v}$ et a comme origine l'extrémité de $\overrightarrow{v}$.

2) Construis le vecteur $\overrightarrow{u} + \vec{v}$

3) Qu'est-ce qu'on peut dire du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$? (sens, direction, longueur)

4) Comment on construit le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide d'une règle et un compas ?

Je contrôle mes connaissances

Activité 8 :

Simplifier les écritures vectorielles suivantes

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{EA}$

2) $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB}$

3) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI}$

Activité 9

Soient les points A, B et I vérifiant $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ I avec A et B deux points non confondus

1) Construis sur ton cahier le point A, B et I, qu'est-ce qu'on peut dire du point I ?

Maintenant nous avons $\vec{u} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ en utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}$ et

$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}$

2) Donne une expression simple du vecteur $\vec{u}$

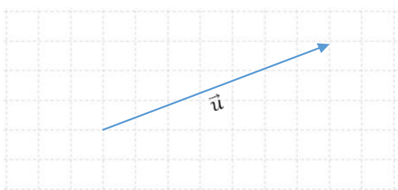
3) Construis sur ton cahier le vecteur $\vec{u}$

A.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

J'observe et je découvre

Activité 1 :



1) Recopie et construis sur un papier quadrillé le vecteur $\vec{u}$

2) Construis le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \vec{u}$

Compare les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{w}$ (sens, direction et longueur) Remarque : on note aussi $\overrightarrow{w} = 2\vec{u}$.

Activité 2 :

Je retiens l'essentiel

- Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et k un réel

  1er cas : si k est un réel positif non nul, $k\vec{u}$ est un vecteur

  - De même sens que $\vec{u}$
  - De même direction que $\vec{u}$
  - De longueur k fois celle de la longueur du vecteur $\vec{u}$

  2ème cas : si k est un réel négatif non nul, $k\vec{u}$ est un vecteur

  - De sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$
  - De même direction que $\vec{u}$
  - De longueur k fois celle de la longueur du vecteur $\vec{u}$

  3ème cas : si $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$

- Soient $\vec{u}$ et v deux vecteurs, k et l deux nombres réels, on a
  - $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
  - $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
  - $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
  - $1\vec{u} = \vec{u}$
  - $0\vec{u} = \vec{0}$

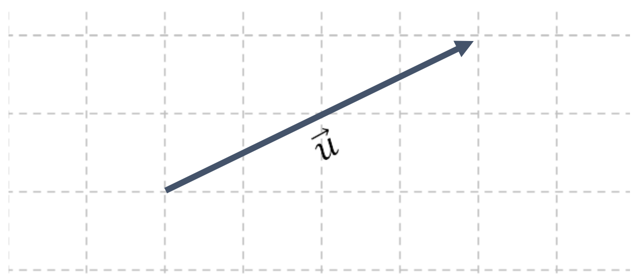
Je contrôle mes connaissances

Activité 3

On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan, construis sur une feuille quadrillée les vecteurs suivants

$\vec{w} = 2\vec{u}$,

1) $\vec{m} = -3\vec{u}$,
2) $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{u}$
3) $\vec{p} = \frac{5}{2}\vec{w}$,
4) $\vec{q} = \frac{1}{6}\vec{m}$



B. Caractérisation de deux vecteurs colinéaires

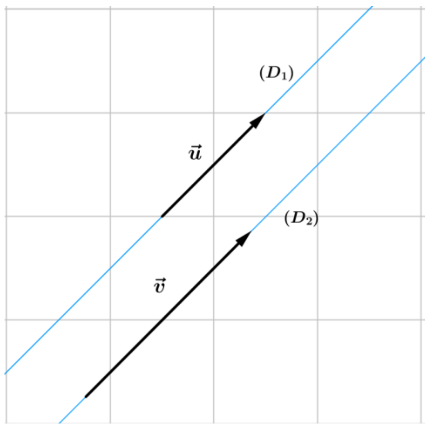
Je lis la définition

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

- Les supports des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles

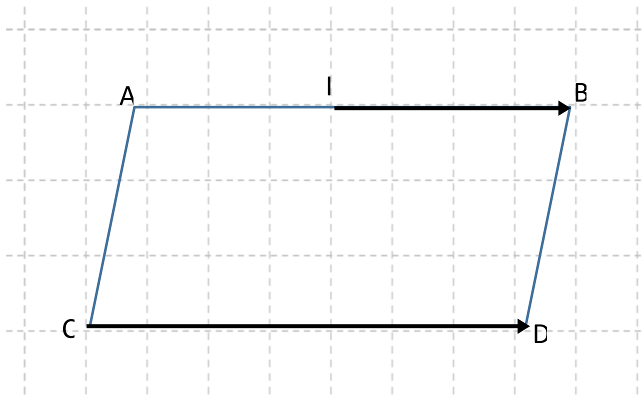
Dans ce cas, on note $\vec{u}//\vec{v}$.



J'observe et je découvre les propriétés

Activité 1 : (1ère propriété)

$ABCD$ est un parallélogramme, I milieu du segment $[AB]$



1) Reproduis sur une feuille quadrillée la figure ci-dessus
2) Exprime en fonction du vecteur $\overrightarrow{IB}$ l'expression du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
3) Donne deux méthodes pour démontrer que $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
4) Dans quelle condition deux vecteurs sont colinéaires ?

Je retiens l'essentiel

Propriétés 1

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que :

$\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

Je lis la démonstration

- Si on a la relation $\vec{u} = k\ \vec{v}$, le vecteur $k\vec{v}$ a la même direction que $\overrightarrow{v}$ (voir multiplication d'un vecteur par un nombre réel non nul) donc $\vec{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{v}$, donc $\vec{u}//\overrightarrow{v}$.
- Réciproquement, si $\vec{u}//v$ alors le vecteur $\overrightarrow{u_1} = k\ \vec{v}$ ‖avec $k = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ est colinéaire à $\vec{u}$

D'où les vecteurs $\vec{u}$ $et\ \overrightarrow{u_1}$ ont la même direction et de même longueur c'est à dire $\vec{u} = \pm\vec{v}$,

on déduit alors $\vec{u} = \pm k\vec{v}$.

Propriétés 2 (Règle de parallélogramme)

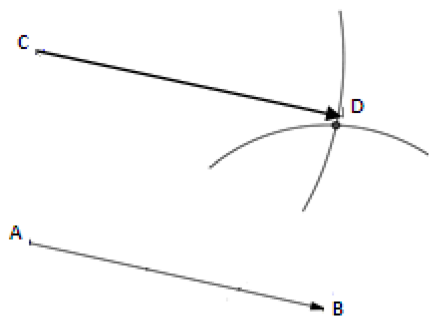
A, B et C sont trois points non alignés, $ABCD$ est un parallélogramme si seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\ A$

Je lis la démonstration

A, B et C sont trois points non alignés, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Réciproquement, si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $AB = CD$ et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Activité 2 : Comment construire deux vecteurs colinéaires par la règle de parallélogramme ?



1) Trace un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de longueur $3cm$ sur une feuille quadrillée, on veut construire un vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
2) Place un point C qui n'appartient pas à la droite (AB),
3) à l'aide d'un compas, construis un arc de centre B et de rayon de même longueur que le segment $[AC]$.

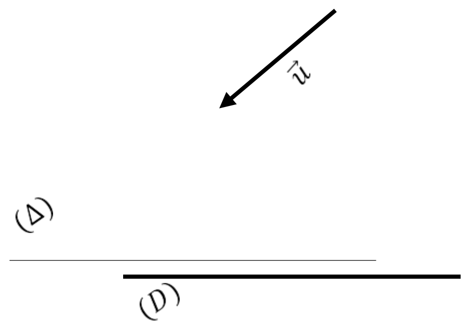
4) Construis un autre arc de centre C et de rayon égal à la longueur du segment [AB]

5) On obtient un point D intersection des deux arcs construits.

C. *Vecteurs directeurs d'une droite*

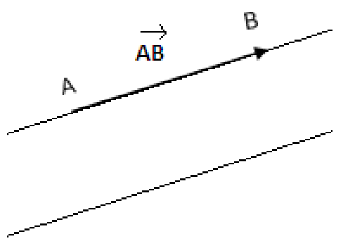
Définition

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) si et seulement si la direction (Δ) du vecteur est parallèle à la droite (D).



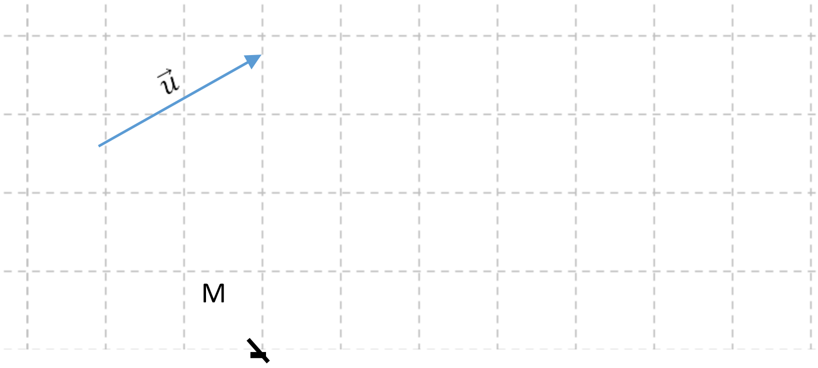
Propriétés:

- Une droite passant par deux points distincts A et B a pour vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) et si un vecteur $\vec{v}$ est colinéaires à $\vec{u}$ alors $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de (D).

Activité 1:



1) Reproduis sur une feuille quadrillée la figure ci-dessus.

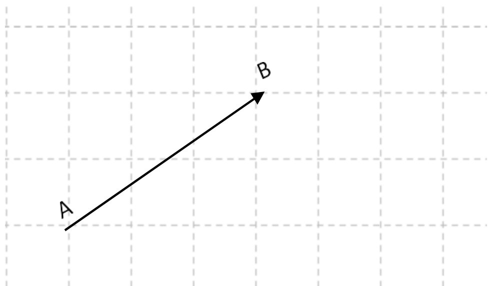
2) Construis une droite (D) passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}$

Activité 2:

Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ colinéaires à $\overrightarrow{BC}$.

Je fais la démonstration

1) Si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, construis le point C

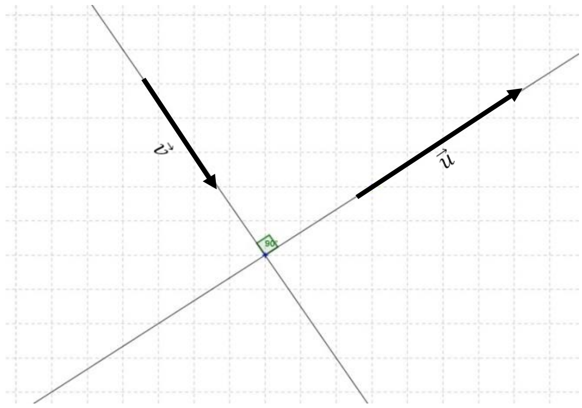


2) Qu'est- ce qu'on peut dire des points A, B et C ?
3) Si A, B et C sont alignés, montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

D. Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et v sont orthogonaux si leurs supports sont orthogonaux.

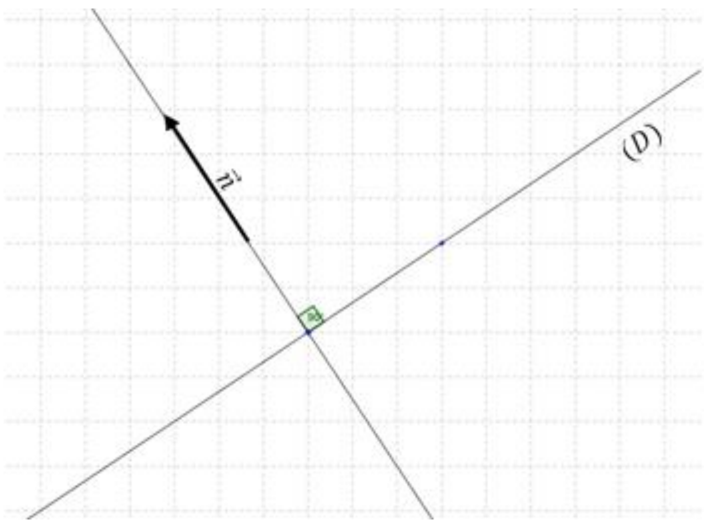


On note $\vec{u} \perp \vec{v}$

E. Vecteur normal d'une droite

Définition :

Soit (D) une droite, le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal de (D) si son support est perpendiculaire à (D).



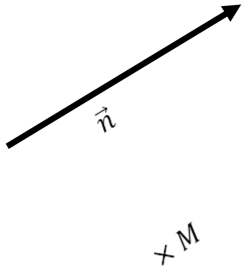
Propriétés d'un vecteur normal :

(D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ est un vecteur normal de la droite

Je contrôle mes connaissances

Activité 1 :

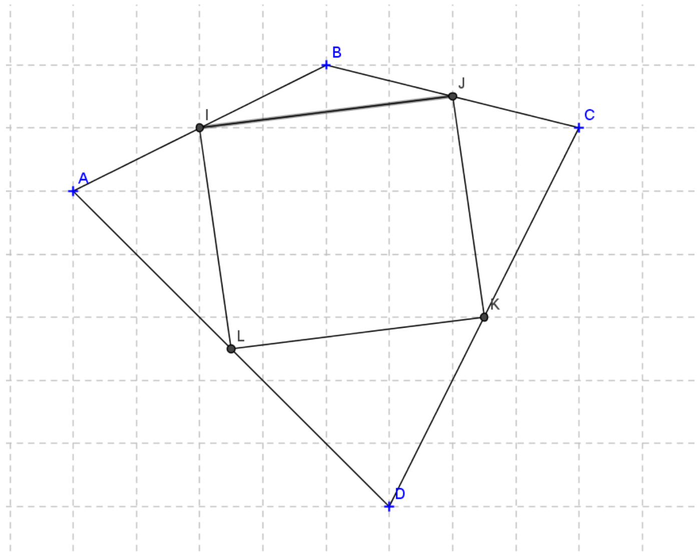
Trace une droite (D) de vecteur normal $\vec{n}$, passant par le point M



Activité 2

$ABCD$ est un quadrilatère, les points I, J, K, L sont des milieux respectifs des segments$[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$

Fais la figure



1) En utilisant le théorème de Thales, démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.Qu'elleestlanaturedelafigure $IJKL$?

GEOMETRIE ANALYTIQUE

A la fin des activités, je dois être capable de:

- Acquérir la notion de géométrie analytique ;
- Mettre en œuvre les techniques élémentaires pour l'étude analytique de situations rencontrées en géométrie vectorielle

F. Somme de deux vecteurs de même origine !

Je découvre une méthode

Activité 1 : Somme de deux vecteurs non colinéaires Soient 3 points A, B et C non alignés du plan.

1. Construis le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
2. Sur la figure, quel est le vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$?
3. Remplace $\overrightarrow{AC}$ par le vecteur qui lui est égal et utilise la relation de Chasles pour déterminer le vecteur somme de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
4. Que représente $\overrightarrow{AD}$ pour le parallélogramme $ABDC$?
5. Enonce une méthode pour construire la somme de deux vecteurs non colinéaires de même origine.

Activité 2 : Somme de deux vecteurs colinéaires Soient 3 points alignés A, B, C du plan.

1. Construis le point D tel $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.
2. Remplace $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{BD}$ et utilise la relation de Chasles pour calculer le vecteur somme de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Décomposition d'un vecteur en somme de deux vecteurs de directions données

Activité 3 : Décomposition suivant deux droites passant par l'origine du vecteur Soient (D_1) et (D_2) deux droites du plan qui se coupent en A et M un point du plan.

1. Construis le point P projeté de M sur (D_1) parallèlement à (D_2).
2. Construis le point Q projeté de M sur (D_2) parallèlement à (D_1).

3. Quelle est la nature du quadrilatère $APMQ$?
4. Trouve sur cette figure deux vecteurs d'origine A tels que leur somme soit égale au vecteur $\overrightarrow{AM}$

Coordonnées d'un vecteur dans un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$

J'observe et je découvre la définition

Activité 4 : Décomposition d'un vecteur suivant les axes d'un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ et coordonnées d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$. Place les points A et B du plan, de coordonnées respectives $A(1\ ;\ 2)$ et $B(3\ ;\ 5)$

On veut exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

1. Faire une figure.
2. Construis les points P et Q projetés de A et de B sur (OJ) parallèlement à (OI).
3. Construis les points R et S projetés de A et de B sur (OI) parallèlement à (OJ).
4. La droite (PA) coupe la droite (SB) en C.
5. Cite tous les vecteurs égaux sur cette figure.
6. En déduire que
7. Comment sont les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{OI}$? Exprime $\overrightarrow{RS}$ en fonction de. $\overrightarrow{OI}$
8. Comment sont les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{OJ}$? Exprime $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de. $\overrightarrow{OJ}$.
9. Quelle est l'expression de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$?

Le couple de réels (x, y) tels que $\overrightarrow{AB}$ =x. $\overrightarrow{OI}$ +y. $\overrightarrow{OJ}$ sont les *« coordonnées »* ou *« composantes scalaires » du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *dans le repère (O, I, J) »*

Activité 5 :

Je découvre la formule générale

Reprendre l'activité 4 avec $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$

Donne la formule pour calculer les coordonnées d'un vecteur en fonction des coordonnées de son extrémité et de son origine.